Introduction à l'analyse

PARCOURS CUPGE

PLANCHE 4 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) = 3y(x)$ avec $y(0) = 3$;

b) $y'(x) + \pi y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$;

c) $3y'(x) = y(x)$ avec $y(1) = -1$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = -5f'(x)$ pour tout x . On suppose que la courbe représentant f dans le repère orthonormé passe par le point $(-2, 1)$. Déterminer f et tracer sa courbe.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = \cos(x)$, et l'équation sans second membre associée (e) $y' + y = 0$.

a) Trouver une solution de (E) sous la forme $y(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.

b) Résoudre (e) .

c) En déduire toutes les solutions de (E) .

Exercice 4.

a) Trouver une fonction g de la forme $g(x) = ae^{-x}$ telle que $g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$$

avec comme conditions initiales $y(0) = 1$.

Exercice 5. L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une auto-inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la *f.é.m* appliquée aux extrémités.

Résoudre l'équation différentielle

a) quand $E(t) = E_0$ constante ; b) quand $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Exercice 6. On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnelle à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 7. On considère l'équation différentielle (E) $y'(x) - 2xy(x) = x$

et l'équation sans second membre associée (e) $y'(x) - 2xy(x) = 0$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(x) = C$ est-elle solution de (E) ?

b) Résoudre (e) ; puis en déduire toutes les solutions de (E) .

Exercice 8. On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) + (x-1)y(x) = e^{-x}$$

1. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = ae^{-x}$.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = -1$ puis vérifiant $y(1) = 0$ et enfin vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$; b) $2xy'(x) + y(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
 c) $(1+x^2)y'(x) + xy(x) - 2x = 0$ sur $\mathbb{R}$; d) $x(x-1)y'(x) - (2x-1)y(x) + x^2 = 0$ sur $]0, 1[$.

Exercice 10. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que le segment de chaque tangente compris entre le point de tangence et l'axe des abscisses est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
 b) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.
 c) $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = Ae^{2x}$ où A est une constante.
 b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = e^{4x}(Ax + B)$ où A, B sont des constantes.
 c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ où A, B sont des constantes.

Exercice 13.

a) Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \tag{E_1}$$

en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

b) On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \tag{E_2}$$

Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1) où g est défini par $g(x) = e^x f(x)$ pour tout x . Puis résoudre (E_2) .

Exercice 14.

a) On considère l'équation différentielle, dite de l'oscillateur harmonique libre :

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = 0 \tag{e}$$

où ω_0 est une constante.

Déterminer les valeurs de ω_0 telles qu'il existe une solution f à (e), non identiquement nulle, et telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

b) On considère maintenant l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique forcé :

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \cos(\omega x) \quad (E)$$

où ω_0 et ω sont des constantes.

En discutant selon les valeurs de ω_0 et ω , résoudre (E).

Exercice 15. Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E)?

b) Trouver deux constantes A et B telles que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$.

c) En déduire une primitive de $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

d) Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 16. On a observé, dans une région donnée, l'évolution d'une population de rongeurs soumis aux attaques d'un prédateur. On note $N(t)$ le nombre de centaines de rongeurs dans cette région à un instant t , exprimé en années. Pour un certain modèle, on peut montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = 2N(t) - \frac{3}{2}(N(t))^2,$$

avec, comme condition initiale, $N(0) = 1$.

a) Trouver une équation différentielle simple vérifiée par $h = \frac{1}{N}$.

b) Déterminer h puis N .

c) Comme se comporte la taille de la population de rongeurs lorsqu'on attend très longtemps ?

Exercice 17. Trouver toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(1-x).$$