Chapitre 1

Compléments sur les suites

1.1 Définitions

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désignera soit le corps des nombres réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), soit celui des nombres complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) soit celui des nombres rationnels ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$). De plus, si $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{Q}$, $|x|$ désigne la valeur absolue de x et si $x = a + ib \in \mathbb{C}$, $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ désigne le module du nombre complexe x.

Définition 1.1.1

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{K}$.
On appelle aussi suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ **privé d'un nombre fini d'éléments** *dans* $\mathbb{K}$.

Exemple 1.1.2 L'application

$$\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \to u_n = \ (-1)^n \end{cases}$$

définit une suite réelle dont le terme général est $u_n = (-1)^n$.

Notation : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) désigne une suite de terme général u_n.

Définition 1.1.3

Une suite (u_n) *est dite convergente si il existe* $l \in \mathbb{K}$ *tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow | \ u_n - l \ | < \varepsilon.$$

Le nombre l *est appelé limite de la suite* (u_n) *et on écrira :*

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad ou \qquad u_n \to l.$$

Proposition 1.1.4

La limite d'une suite (u_n) *est unique.*

Exemple 1.1.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \frac{1}{n}$, $\lim u_n = 0$. En effet on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ en posant } N_\varepsilon := (E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1) \in \mathbb{N}, \text{ on a } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow | \ \frac{1}{n} \ | < \varepsilon.$$

Ici $E(x)$ désigne la partie entière d'un nombre réel x.

Définition 1.1.6

Une suite réelle (u_n) est dite :

1. *majorée : s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$u_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ;$$

2. *minorée : s'il existe $m \in R$ tel que*

$$u_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ;$$

3. *bornée : s'il existe $(M, m) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$m \leq u_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.1.7 Les définitions et propositions sont écrites pour des suites définies sur $\mathbb{N}$. Nous vous laissons le soin de les adapter au cas où (u_n) est définie pour $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ majoré.

Exemple 1.1.8 Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$u_n = a^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La suite (u_n) est bornée si et seulement si $|a| \leq 1$.

Proposition 1.1.9

Toute suite convergente est bornée.

On en déduit par contraposée que si une suite est non bornée, elle est nécessairement non convergente. Ce qui nous amène à préciser différentes situations de non convergence.

Définition 1.1.10

1. *On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad n > N_A \Rightarrow u_n > A.$$

2. *On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \; n > N_A \Rightarrow u_n < -A$$

Exemple 1.1.11 Avec $u_n = 2^n$, on a $\lim u_n = +\infty$. En effet :

$$\forall A > 0, \text{ en posant } N_A = E(\frac{\ln(A)}{\ln(2)}) \in \mathbb{N} \text{ on a } n > N_A \Rightarrow u_n > A$$

1.2 Propriétés sur les suites

1.2.1 Opérations sur les suites

On note S l'ensemble des suites numériques. On définit sur cet ensemble la somme de deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)\,,$$

et la multiplication d'une suite (u_n) par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$\lambda\,(u_n) = (\lambda u_n)\,.$$

Muni de ces deux opérations, S a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On peut définir aussi le produit des deux suites (u_n)et (v_n) par :

$$(u_n) \cdot (v_n) = (u_n v_n)\,.$$

Proposition 1.2.1

Soient (u_n)et (v_n) deux suites convergentes respectivement vers u et v. Les suites :

$$(u_n + v_n)\,, \qquad (\lambda u_n)\,, \qquad (u_n v_n)$$

convergent respectivement vers :

$$u + v, \quad \lambda u, \quad uv.$$

De plus, si $v \neq 0$, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie pour n assez grand et a pour limite $\frac{u}{v}$.

1.2.2 Comparaison des suites convergentes

Proposition 1.2.2

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergentes telles que :

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq \tilde{N} \Rightarrow u_n \geq v_n,$$

alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Proposition 1.2.3

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :
- $\exists \tilde{N} \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq \tilde{N} \Rightarrow u_n \leq w_n \leq v_n$;
- *(u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.*

Alors, la suite (w_n) converge vers la même limite l.

1.3 Suites réelles monotones

Définition 1.3.1

La suite réelle (u_n) est dite croissante à partir d'un certain rang si :

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N},\, n \geq \tilde{N} \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n,$$

et décroissante si :

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N},\, n \geq \tilde{N} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

On rappelle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n := \sup\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n := \inf\{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 1.3.2

Une suite réelle croissante et majorée converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Une suite réelle décroissante et minorée converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Démonstration : Les deux items se démontrent de la même manière. Montrons le premier item. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. La propriété de borne supérieure entraîne l'existence de $\sup u_n$. Montrons que la suite (u_n) converge vers $\sup u_n$. De la caractérisation de la borne sup, on déduit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,;\ \sup u_n - \varepsilon < u_{n_\varepsilon} \leq \sup u_n.$$

Mais la croissance de la suite entraîne que pour $n \geq n_\varepsilon$ on a $u_n \geq u_{n_\varepsilon}$ et donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup u_n - \varepsilon < u_{n_\varepsilon} \leq u_n \leq \sup u_n.$$

Ce qui permet de conclure à la convergence de la suite (u_n) vers $\sup u_n$. ■

Exemple 1.3.3 Soit la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \ .$$

1. La suite (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$
2. La suite (u_n) est majorée : $u_n \leq 2$ car $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

Remarque 1.3.4 Attention : la condition n'est que suffisante. Ainsi la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone et pourtant, elle converge vers zéro.

1.4 Limites supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.1 (Suites adjacentes)

Deux suites (u_n), (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et leur différence tend vers zéro.

Corollaire 1.4.2

Deux suites $(u_n), (v_n)$ réelles et adjacentes sont convergentes vers une même limite.

Démonstration : Supposons que (u_n) est croissante. Comme $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_\varepsilon \ \Rightarrow u_n \leq v_{n_\varepsilon} + \varepsilon,$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + u_{n_\varepsilon} \leq v_n.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement majorées et minorées et donc convergentes. De plus, toujours du fait que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, ces deux suites ont la même limite. ∎

Théorème 1.4.3 (limite sup et limite inf d'une suite bornée)

Pour tout suite (u_n) bornée de $\mathbb{R}$, on peut définir les suites de terme général :

$$a_n := \inf_{p\geq n} u_p, \quad b_n := \sup_{p\geq n} u_p. \tag{1.1}$$

Ces deux suites sont convergentes et on note

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\ u_n := \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geq n} u_p, \quad \lim_{n\to+\infty}\inf\ u_n := \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\geq n} u_p. \tag{1.2}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \inf u_n \leq \lim_{n\to+\infty} \sup u_n.$$

Démonstration : La suite (u_n) étant bornée, les ensembles $A_n = \{u_p, p \geq n\}$ sont aussi bornés et admettent une borne supérieure et une borne inférieure. Par construction la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. La proposition 1.3.2 permet donc de conclure à leur convergence vers respectivement $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$. ∎

Exemple 1.4.4 Soit la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. On a $\limsup_{n\to+\infty} u_n = 1, \quad \liminf_{\to+\infty} u_n = -1$.

Remarque 1.4.5 Par extension lorsque la suite (u_n) n'est pas majorée, sa limite supérieure est $+\infty$ et dans le cas où elle est non minorée sa limite inférieure est $-\infty$. Ainsi **pour toute suite réelle** (u_n) on définit $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geq n} u_p, \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\geq n} u_p$.

Exemple 1.4.6 Soit la suite de terme général $u_n = n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\ u_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\inf\ u_n = 0.$$

1.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$

1.5.1 Suites extraites-Valeurs d'adhérence d'une suite réelle

Définition 1.5.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite (v_n) est une suite extraite (ou sous-suite) de la suite (u_n) s'il existe une application $\phi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, **strictement croissante**, telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.*

Exemple 1.5.2 Par exemple (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) sont des suites extraites de (u_n), correspondant respectivement aux applications $\phi(n) = 2n, \phi(n) = 2n+1, \phi(n) = 3n$.

Théorème 1.5.3

Si une suite (u_n) converge vers l, toutes ses suites extraites convergent vers l.

Démonstration : On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq\ u_n \leq l + \varepsilon.$$

Mais ϕ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$. Ainsi, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N,\ \ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq\ u_{\phi(n)} \leq l + \varepsilon.$$

D'où la conclusion. ■

Remarque 1.5.4 On notera que si deux suites extraites convergent vers deux limites différentes, la suite initiale n'est pas convergente.

Exemple 1.5.5 Soit la suite de terme général $u_n = \sin\ \frac{n\pi}{6}$. Les suites de terme général $v_n = u_{6n} = 0$, $\quad w_n = u_{3(2n+1)} = (-1)^n$ sont deux suites extraites de la suite (u_n). En particulier, la suite (u_n) n'est pas convergente.

Proposition 1.5.6

Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors la suite (u_n) converge vers cette limite commune.

Remarque 1.5.7 Il est facile de voir que la convergence des deux suites extraites ne suffit pas en considérant la suite $((-1)^n)$.

Démonstration : D'aprés la convergence des deux suites extraites, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq\ u_{2n} \leq l + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq\ u_{2n+1} \leq l + \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose alors $\overline{n}_\varepsilon = \max\{2n_\varepsilon, 2n'_\varepsilon + 1\}$, et on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \overline{n}_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ n \geq \overline{n}_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq\ u_n \leq l + \varepsilon.$$

■

Définition 1.5.8 (Valeur d'adhérence d'une suite)

On appelle valeur d'adhérence d'une suite (u_n), tout réel a qui est limite d'une suite extraite de (u_n).

Exemple 1.5.9 1 est valeur d'adhérence de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Proposition 1.5.10

Toute suite (u_n) convergente a une unique valeur d'adhérence. Cette unique valeur d'adhérence est la limite de la suite (u_n).

1.5.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

On se place ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème 1.5.11 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence.

Démonstration : On va prouver un résultat un peu plus fort précisé dans le lemme suivant.

Lemme 1.5.12

Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est non vide et on a :

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} u_n &= \min\{l \in \mathbb{R}, l \text{ valeur d'adhérence de } (u_n)\},\\ \limsup_{n\to+\infty} u_n &= \max\{l \in \mathbb{R},\ l \text{ valeur d'adhérence de } (u_n)\}.\end{aligned}$$

Démonstration : On a vu qu'on pouvait alors définir les suites $a_n := \inf_{p\geq n} u_p$ et $b_n := \sup_{p\geq n} u_p$. Ces deux suites sont convergentes. On va montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ (de même pour $\liminf_{n\to+\infty} u_n$). Posons $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists p_{\varepsilon,n} \geq n \text{ tel que } b_n - \varepsilon < u_{p_{\varepsilon,n}} \leq b_n.$$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p_n \geq n; \quad b_n - \frac{1}{n} < u_{p_n} \leq b_n.$$

Posons $A_n := \{p \in \mathbb{N} |\, p \geq n \text{ et } \ b_n - \frac{1}{n} < u_p \leq b_n\}$. C'est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ minoré par n. Appelons $\overline{p}_n = \min A_n$. On définit alors une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à n associe $\psi(n) = \overline{p}_n$. Comme $\psi(n) \geq n$, $\lim_{n\to+\infty} \psi(n) = +\infty$. On va "extraire" de cette application une application strictement croissante. Posons $\phi(0) = \psi(0)$ et définissons ϕ par récurrence. Soit

$$B_{n+1} = \{k \geq n+1 | \psi(k) > \phi(n)\ \}.$$

Comme $\psi(n)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, B_{n+1} est non vide et on peut donc définir $\min B_{n+1}$ comme élément de $\mathbb{N}$. Posons
$$\phi(n+1) = \psi(\min B_{n+1}).$$
Par construction ϕ est strictement croissante et la suite $(u_{\phi(n)})$ vérifie :
$$b_{\min B_n} - \frac{1}{\min B_n} < u_{\phi(n)} \leq b_{\min B_n}.$$
Comme la suite (b_n) est convergente vers β, et que $\lim_{n\to+\infty} \min B_n = +\infty$, le passage à la limite conduit à :
$$\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \beta = \lim_{n\to+\infty} \sup u_n.$$
Et donc β est bien une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Soit l une autre valeur d'adhérence éventuelle de la suite (u_n). Il existe une application η de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_{\eta(n)} = l.$$
On a $b_n = \sup_{p\geq n} u_p \geq \sup_{p\geq n} u_{\eta(p)}$. Et donc $\lim_{n\to+\infty} b_n \geq \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_{\eta(p)} = l$ (car la suite $(u_{\eta(n)})$ converge et donc sa limite supérieure est égale à sa limite). Donc $\beta \geq l$.

Le lemme est démontré. ∎

Théorème 1.5.13

Une suite réelle (u_n) est convergente si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf u_n \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

et dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration : Soit (u_n) une suite réelle. Supposons qu'elle converge vers l. Dans ce cas, toutes ses suites extraites convergent vers l. Autrement dit, la suite (u_n) possède une unique valeur d'adhérence : $l \in \mathbb{R}$. Du lemme 1.5.12 on déduit (1.3). Réciproquement, si (1.3) a lieu, alors la suite (u_n) converge car elle est encadrée par les suites $(\inf_{p\geq n} u_p)$ et $(\sup_{p\geq n} u_p)$ qui convergent toutes les deux vers une même valeur réelle. ∎

1.6 Suites de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.6.1

On dit qu'une suite (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \ n \geq n_\varepsilon,\ p \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.6.2

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle vérifie donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \ n \geq n_\varepsilon,\ p \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Fixons un choix de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par exemple $\varepsilon = 1$. De ce qui précède on peut déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ fixé tel que pour tout $n \geq n_1$ on a :

$$|u_n - u_{n_1}| \leq 1.$$

On a donc, pour tout $n \geq n_1$:

$$-1 + u_{n_1} \leq u_n \leq\ 1 + u_{n_1}.$$

Posons alors $M = \max\{u_0, u_1, ..., u_{n_1-1},\ \ 1 + u_{n_1}\}$ et $m = \min\{u_0, \nu_1, ..., u_{n_1-1},\ \ 1 + u_{n_1}\}$. Ainsi on a *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$m \leq u_n \leq M.$$

Ceci démontre que la suite est bornée. ■

Théorème 1.6.3

L'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites dans $\mathbb{K}$. De plus, le produit de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.

Démonstration : Il suffit de montrer d'une part que toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de suites de Cauchy est de Cauchy, et d'autre part que le produit de deux suites de Cauchy est de Cauchy. La première propriété est laissée en exercice. Montrons la seconde.

Soit $(u_n), (u_n)$, deux suites de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Soit $(z_n) = (u_n v_n)$ la suite produit. Par l'hypothèse on sait que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \ n \geq n_\varepsilon,\ p \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \ n \geq n'_\varepsilon,\ p \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |v_n - v_p| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et quelconque. On veut qu'à *partir d'un certain rang* on ait $|u_n v_n - u_p v_p| \leq \varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - u_p v_p| &\leq |u_n v_n - u_n v_p| + |u_n v_p - u_p v_p| \\ &\leq |u_n|\,|v_n - \ v_p| + |v_p|\,|u_n - u_p|\,. \end{aligned}$$

Mais on a montré que toute suite de Cauchy est bornée. Donc il existe $L = \max\{L_u, L_v\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leq L$ et $|v_n| \leq L$. Ainsi, si on pose $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, on a :

$$n \geq n''_\varepsilon,\ p \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |u_n v_n - u_p v_p| \leq 2L\varepsilon.$$

La démonstration est terminée en posant $\overline{n}_\varepsilon := n''_{\frac{\varepsilon}{2L}}$. ■

1.6.0.1 Suites convergentes et suites de Cauchy dans $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Corps complets.

Théorème 1.6.4

Toute suite convergente dans $\mathbb{K}$ est de Cauchy.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergente. Il existe donc $l \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

Mais on a toujours :

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - l| + |u_p - l|\,.$$

Si n et p sont choisis tels que $n \geq n_\varepsilon$ et $p \geq n_\varepsilon$, on aura :

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - l| + |u_p - l| \leq 2\varepsilon.$$

Au final, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, en posant $n'_\varepsilon := n_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$, on a $n \geq n'_\varepsilon,\ p \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$ ■

Et la réciproque ? ? Elle est fausse si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque : Il existe des suites de nombres rationnels qui sont de Cauchy et non convergentes.

Dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on considère les suites :

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

La suite (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. De plus $u_n \leq v_n$ et $|u_n - v_n| = \frac{1}{n.n!}$, et donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, si $n \geq p \geq n_\varepsilon$, on a $u_p \leq u_n \leq v_n \leq v_p$ et donc

$$|u_n - u_p| = u_n - u_p \leq v_p - u_p = |u_p - v_p| \leq \varepsilon.$$

La suite (u_n) est donc de Cauchy. On va montrer qu'elle ne peut pas converger dans $\mathbb{Q}$. Pour cela faisons un raisonnement par l'absurde et supposons qu'il existe $l \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Comme la suite (u_n) est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < l$. En effet, s'il existait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq l$, alors pour tout $n > n_0$ on aurait $u_n > u_{n_0} \geq l$. Et donc pour $\varepsilon = 2(u_{n_0+1} - l\ )$, qui est bien un nombre réel positif, il en résulterait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existerait $\overline{n} = \max\{n_0 + 1, n\}$ tel que $u_{\overline{n}} \geq u_{n_0+1} = \frac{\varepsilon}{2} + l > \varepsilon + l$. Ceci contredirait la convergence de la suite (u_n) vers l).

Plus précisément, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < l \leq v_n$. En effet, s'il existait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \leq v_{n_0} < l$ alors pour tout $n \geq n_0$ on aurait $u_n \leq v_n \leq v_{n_0} < l$. Et donc pour $\varepsilon = 2(l - v_{n_0})$, qui est bien un nombre réel positif, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existerait $\overline{n} = \max\{n_0, n\}$ tel que $u_{\overline{n}} \leq v_{n_0} = -\frac{\varepsilon}{2} + l < -\varepsilon + l$). Ceci contredirait la convergence de la suite (u_n) vers l.

Comme $l \in \mathbb{Q}_+$ (puisque $u_n > 0$) il existe $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $l = \frac{p}{q}$. Et donc

$$u_q < l \leq v_q \Leftrightarrow q!u_q < q!l \leq q!v_q.$$

Or $q!u_q = \sum_{k=0}^{k=q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$ et $q!u_q < q!v_q = q!u_q + \frac{1}{q} < q!u_q + 1$. Ainsi $q!l \in]q!u_q, q!u_q + 1[$ et donc $q! \notin \mathbb{N}$. En conséquence, $l \notin \mathbb{Q}$.

Par contre on a

Théorème 1.6.5

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est convergente.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La suite (u_n) est alors bornée. Comme $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure, on a vu que l'on peut alors définir les suites suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_n &= \inf_{p \geq n} x_p, \\ b_n &= \sup_{p \geq n} x_p. \end{aligned}$$

La suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. De plus, la suite (u_n) étant de Cauchy, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \geq n_\varepsilon, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

On en déduit donc que $\lim_{n \to +\infty}(b_n - a_n) = 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et de fait convergentes vers la même limite. D'où

$$\lim \inf_{n \to +\infty} u_n = \lim \sup_{n \to +\infty} u_n.$$

On conclut en appliquant le théorème 1.5.13. ∎

Remarque 1.6.6 On peut construire $\mathbb{R}$ à l'aide des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. On note SC l'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et par I, l'ensemble des suites de $\mathbb{Q}$ qui tendent vers 0. On construit la relation d'équivalence dans SC : $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty}(x_n - y_n) = 0$.

$\mathbb{R}$ est alors définit comme l'anneau quotient SC/I. Bien entendu, il sagit alors de prouver que l'ensemble ainsi construit est un corps totalement ordonné, archimédien et complet !

1.7 Suites récurrentes

Définition 1.7.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I. Toute suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné dans } I \\ u_{n+1} = f(u_n) & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est appelée suite récurrente.

Exemple 1.7.2 La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est une suite récurrente. En effet, elle correspond à $I = [0, 2]$, $f : I \to I \quad f(x) = \sqrt{1 + x}$.

Proposition 1.7.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ I \to I$ une application continue sur I, si la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné dans } I \\ u_{n+1} = f(u_n) & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers $l \in I$, alors l est solution dans I de l'équation de $f(x) = x$.

Remarque 1.7.4 Du théorème précédent on déduit que si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans I, la suite (u_n) ne converge pas.

Définition 1.7.5 (Point fixe)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$. Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée point fixe de f.

Définition 1.7.6 (Applications lipschitziennes-Applications contractantes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ I \to \mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe $k \in]0, +\infty[$ tel que :

$$x, y \in I \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

L'application f est dite contractante si on peut choisir $k \in]0, 1[$.

Proposition 1.7.7

Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors f est lipschitzienne pour, par exemple

$$k = \sup_{x\in[a,b]} \mid f'(x) \mid .$$

Démonstration : Soit $x, y \in [a, b]$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, f' est continue sur $[a, b]$ et en conséquence f' est bornée sur $[a, b]$. On en déduit :

$$\forall x, y \in [a, b],\ \mid f(x) - f(y) \mid \leq \sup_{z\in[a,b]} |f'(z)| \mid x - y \mid .$$

■

Théorème 1.7.8

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f\ :\ [a, b] \to [a, b]$ [a]. Si f est contractante, elle admet un unique point fixe $l \in [a, b]$ et pour tout $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente :

$$f : \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

converge vers l. De plus, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|u_n - l| \leq \frac{k^n}{1 - k}|u_0 - u_1|.$$

a. si $a = -\infty$, $[a, b] :=] - \infty, b]$, si $b = +\infty$, $[a, b] := [a, +\infty[$ et si $a = -\infty$ et b$= +\infty$, alors $[a, b] = \mathbb{R}$.

Démonstration : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|u_n - l| = \big|f(u_{n-1}) - f(l)\big| \leq k|u_{n-1} - l|.$$

Par récurrence, on obtient alors

$$0 \leq |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Or $0 < k < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} k^n|u_0 - l| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Par ailleurs, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a par récurrence,

$$|u_i - u_{i+1}| = \left|f(u_{i-1}) - f(u_i)\right| \leq k|u_{i-1} - u_i| \leq k^i |u_0 - u_1|$$

et donc, pour tout $p > n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |u_n - l| &= \left|\left(\sum_{i=n}^{p-1} u_i - u_{i+1}\right) + u_p - l\right| &\leq& \ |u_p - l| + \sum_{i=n}^{p-1} |u_i - u_{i+1}| \\ &&\leq& \ |u_p - l| + \sum_{i=n}^{p-1} k^i |u_0 - u_1| \\ &&\leq& \ |u_p - l| + k^n |u_0 - u_1| \sum_{i=0}^{p-n-1} k^i \\ &&\leq& \ |u_p - l| + k^n |u_0 - u_1| \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\ &&\leq& \ |u_p - l| + \frac{k^n}{1-k}|u_0 - u_1|. \end{aligned}$$

On fait maintenant tendre p vers $+\infty$, on obtient bien

$$|u_n - l| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

■

Exemple 1.7.9

$$I = [0, 2], \quad \left\{ \begin{array}{c} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{array} \right. .$$

L'appplication f est définie par : $f(x) = \sqrt{1+x}$. L'application f est contractante. En effet elle est continue sur I, dérivable sur $[0, 2]$, sa dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ vérifie :

$$\sup_{x\in I} \mid f'(x) \mid = \max_{x\in I} \mid f'(x) \mid = f'(0) = \frac{1}{2} < 1.$$

D'aprés le théorème 1.7.8, la suite (u_n) est convergente. De plus, sa limite l est l'unique point fixe de f dans I ; c'est-à-dire la solution, dans I de : $\sqrt{1+x} = x$. Or, l'unique solution de cette équation dans I, est : $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a également : $\mid u_n - l \mid \leq \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \mid u_0 - u_1 \mid$. Or, $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{1+0} = 1$. Donc : $\mid u_n - l \mid \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

1.8 Exercices

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par récurrence par

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 > 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* $u_n > 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *On suppose que la suite* (u_n) *converge. Quelle est sa limite* l *?*
3. *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
4. *En déduire la nature de la suite* (u_n) *(convergente ou pas).*

Exercice 2 (Suites de Cauchy)

1. *Montrer que les suites suivantes sont de Cauchy :*

$$u_n = \cos\frac{1}{n}, \quad u_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}, \quad u_n = \frac{\cos(1!)}{1\cdot 2} + \frac{\cos(2!)}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos(n!)}{n(n+1)}.$$

2. *Montrer que les suites suivantes ne sont pas de Cauchy :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Exercice 3

Soit (u_n) *une suite de nombres réels telle que les suites extraites* (u_{2n}), $u_{2n+1})$ *et* (u_{3n}) *convergent. Montrer que la suite* (u_n) *converge.*

Exercice 4

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ *et* $f\ : [a,b]\ \to [a,b]$ *continue et croissante.*

1. *Montrer que la suite récurrente définie par* $u_0 = b$ *et*

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

est décroissante.

2. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*
3. *Soit* $a = -1$, $b = 1$ *et* $f(x) = \arctan x$.
   (a) *Montrer que* $f([-1,1)] \subset [-1,1]$.
   (b) *Montrer que la suite récurrente définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \arctan u_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$ *est convergente et calculer sa limite.*

Exercice 5

1. *Soit* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Soit* $u_0 \in \mathbb{R}$. *On suppose que la suite récurrente :*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

converge vers l. *Montrer que soit la suite* (u_n) *est stationnaire soit* $|f'(l)| \leq 1$.

2. *Application :* $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$. *Etudier en fonction de* $u_0 \in \mathbb{R}$, *la nature des suites*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{u_n^2+1} \end{cases}.$$

Exercice 6

Etudier les suites récurrentes définies par les applications suivantes :

1. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\cos^2(x))$.
2. $I =]0,+\infty[$, $f(x) = 2 + \ln(x)$.
3. $I =]-1,+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Exercice 7

1. *Une suite réelle admettant une valeur d'adhérence unique est-elle nécessairement convergente ?*

2. *Soit* (u_n) *une suite bornée de nombres réels. Montrer l'équivalence suivante :*

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow (u_n) \text{ admet une unique valeur d'adhérence.}$$

Exercice 8

Soit f *une application continue de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$.

1. *Montrer que* f *admet un point fixe.*
2. *On définit la suite récurrente* u_n *par*

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1], \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

   Montrer que (u_n) *converge si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.