Aix-Marseille Université 2014-2015

Analyse 1

DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU 2

Vendredi 20 mars 2015

Durée : deux heures. Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Les exercices qui suivent sont indépendants les uns des autres. Le barême indiqué est juste indicatif et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1 (3 pts)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des symboles mathématiques usuels ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$) les phrases suivantes :

1. (**1 pt**) $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. (**1 pt**) $f(x)$ ne tend pas vers 3 quand x tend vers 1.
3. (**1 pt**) $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (2 pts)
Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. La fonction f admet-elle une limite quand x tend vers 1 (**0,5 pt**) ? Quand x tend vers 0 (**0,5 pt**) ? Est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$ (**0,5 pt**) ? En $x = 1$ (**0,5 pt**) ?

Exercice 3 (3 pts)

1. (**1 pt**) On note $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+5}$ pour $x \geqslant 3$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
2. (**2 pts**) On note $g(x) = \sqrt{x^2+2x+7} - (x+5)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la limite de g en $+\infty$? Et en $-\infty$?

Exercice 4 (2 pts)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^2 + 1$ et $g(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - x + 3$. Montrez qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5 (3 pts)
On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrez qu'il existe A tel que f est bornée sur $[A, +\infty[$ (**1 pt**). En déduire que f est bornée sur $[0, +\infty[$ (**1 pt**). Est-il vrai qu'il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que $\sup\limits_{[0,+\infty[} f = f(a)$ (**1 pt**) ?

Exercice 6 (2 pts)
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et x_0 un réel tel que $f(x_0) > 0$. Montrez qu'il existe un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) tel que

$$\forall x \in [a, b] : \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{3}.$$

Exercice 7 (6 pts)
On considère une fonction $F :]0, 1[\to \mathbb{R}$ vérifiant pour une certaine constante $C > 0$ la propriété suivante :

$$(*) \qquad \forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, \quad |F(x) - F(y)| \leq C\sqrt{|x-y|}.$$

1. Montrez que F est continue sur $]0, 1[$. (**2 pts**)
2. Montrez que F est bornée sur $]0, 1[$. (**2 pts**)
3. Donnez un exemple d'une fonction continue de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et non bornée. Donnez un exemple d'une fonction F non constante vérifiant $(*)$. (**2 pts**)