Aix-Marseille Université 2014-2015

Analyse I

PLANCHE 2 : LIMITES, CONTINUITÉ

Les exercices marqués du symbole • sont les exercices qui seront traités prioritairement en TD.

Le site internet EXO7 (http ://exo7.emath.fr) est fait pour vous ! Il s'agit d'une base de donnée d'exercices destinés aux étudiants de licence, avec des corrections des exercices écrites et filmées. Il a été conçu par une large équipe d'enseignants-chercheurs de plusieurs universités françaises.

Certains exercices de cette planche sont tirés du site Exo7. D'autres sont similaires (mais pas identiques) à un exercice d'EXO7.

Alors n'hésitez plus ! Consultez EXO7 et servez-vous en pour préparer les séances de TD à l'avance et pour vous entraîmer !

Limites de fonctions

Exercice 1 •

Soient $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.
2. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.

Exercice 2 •

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ pour $x \in]-1, 1[$. Quelle est la limite à droite de f en 1 ?
2. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ pour $x \in [3, +\infty[$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle la limite de f en $+\infty$?
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à gauche de f en 1 ?
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à droite de f en 0 ?
6. $f(x) = \frac{\ln(2x^2-x+2)}{\sqrt{x^3+1}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Quelle est la limite en $+\infty$?
7. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ pour $x \in]-\pi, \pi[$. Quelle sont les limites (respectivement à droite et à gauche) en $-\pi$ et π ?
8. $f(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)\big(\cos(2x)-\cos(x)\big)}$ pour $x \in [-2, 2] \setminus \{0\}$. Quelle est la limite en 0 ?
9. $f(x) = 2x\ln(x+\sqrt{x})$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la limite (à droite) en 0 ?
10. $f(x) = (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$ pour $x \in]-1, +\infty[$. Quelle est la limite (à droite) en -1 ?
11. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
12. $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 3 •

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un point de I. On suppose que f admet une limite $a > 0$ en x_0. Démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{a}{2}$.

Propriétés des limites et opérations

Exercice 4 [Opérations sur les limites] •

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On pose $I =]a, b[$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x \to a,\, x > a} f(x)$ et $m = \lim_{x \to a,\, x > a} g(x)$.

1. Montrer que $\lim_{x \to a,\, x > a} (f + g)(x) = l + m$.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que pour tout $x \in]a, c[$, $g(x) \neq 0$. Montrer que
$$\lim_{x \to a,\, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$
3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que pour tout $x \in I, g(x) > 0$. Montrer que $\lim_{x \to a,\, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 5 [Limite, limite à droite et limite à gauche] •

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.
2. Reprendre la question 1 avec $l = +\infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 6 [Caractérisation de la limite à gauche]

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :
   Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A,
$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l,$$
   où "$x_n \uparrow a$ quand $n \to +\infty$" signifie "$a = \lim_{n \to +\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$".
2. Reprendre la question 1 avec $l = +\infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 7 [Limite en $+\infty$] •

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 8 [Fonction périodique admettant une limite]

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 9 •

On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

Exercice 10 •

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Continuité en un point, prolongement par continuité

Exercice 11 •

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par :
$f(x) = x$ si $x < 1$,
$f(x) = x^2$ si $1 \leq x \leq 4$, et
$f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$.

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Montrer que f est bijective et donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 12 •

Soit $f:\ \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer α tel que, $|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) + 3| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice 13 •

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $a > 0$. Montrer que pour tous réels $x, y \in [a, +\infty[$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{a^2}$. En déduire que f est continue sur $]a, +\infty[$. Que peut-on dire de la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 14

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Trouver $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \Rightarrow \big|\sin(x) - \sin(a)\big| < \epsilon$. Que peut-on en déduire sur la fonction sinus ?

Exercice 15 •

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
2. $g(x) = x\frac{1}{\sin(x)}$ si x n'est pas un multiple de π et $g(x) = 0$ si x l'est ;
3. $j(x) = xE(x)$;
4. $k(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 16 [Fonction continue, non nulle en un point] •

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 17 [Prolongement par continuité]

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 18 [Prolongement par continuité] •

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\lim_{x\to -1} f(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 19 • Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Continuité sur un intervalle - théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 20 •

Soit f une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer que f garde un signe constant sur I.
2. On suppose que $f(x) \subset \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 21 [Polynôme de degré impair] •

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 22 •

Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 23

1. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de l'intervalle $[a; \frac{a+b}{2}]$.
2. *Application :* une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 24 •

soit f l'application de $[-1, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ pour tout $x \geq -1$. Montrer que f est bijective de $[-1, \infty[$ dans $]0, 1]$ et donner une formule explicite pour sa fonction réciproque.

Exercice 25 [Existence d'un maximum] •

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 26 •

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \exists x \in [0, 1], \ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 27 [Borne supérieure atteinte] •

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\{f(x), x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré et qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \sup\{f(x), x \in \mathbb{R}_+\}$.

Suites récurrentes et continuité

Voir les exercices 45, 46, 48, 51, 52 de la planche 1 sur les suites.

Exercices supplémentaires

Exercice 28 [Fonction lipschitzienne]

Soit $f\ :\mathbb{R}\ \to\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout $\mathbb{R}$).

Exercice 29 On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si

$$\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall x,y\in I,\ (|x-y|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon)$$

1. Montrer que $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}$, pour tout $x,y\in\mathbb{R}_+$. En déduire que l'application $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que si $f\colon I\to\mathbb{R}$ est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.
3. Montrer que l'application $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Exercice 30 [Fonctions monotones]

Soit $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ et $I=]a,b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A=\{f(x),\ x\in I\}$, $\alpha=\inf A$ et $\beta=\sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A=-\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A=+\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\alpha=-\infty$). Montrer que $\lim_{x\to b}f(x)=\beta$.
2. Soit $c\in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c)\le f(c)\le f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c)=f_g(c)$ pour tout $c\in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$.

Exercice 31 [Injectivité et continuité impliquent monotonie]

Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, et soit $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 32 [Valeur intermédiaire]

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, l'ensemble $\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t\in[0,1]$, on pose $\varphi(t)=\inf\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.
2. Soit $t\in[0,1]$, montrer que $\varphi(t)\in[0,1]$ et que $f(\varphi(t))=\frac{f(0)+f(t)}{2}$.
3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.
4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Exercice 33 [Continuité de "max" et "min"]

1. Montrer que, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, $\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ et $\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.
2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f\top g$ et $f\perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

   $$(f\top g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ (f\perp g)(x)=\min\{f(x),g(x)\},\ \text{pour } x\in\mathbb{R}.$$

   Soit $a\in\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f\top g$ et $f\perp g$ sont continues en a.

Exercice 34 [Convexe implique continue]

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 35 [Exercice sur les valeurs intermédiaires]

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Exercice 36 [Point fixe]

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1],\ |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 37 [Equation fonctionnelle]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in R_+,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que f est à valeurs positives ou nulles.
2. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.

3. Calculer $f(0)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et p, q deux entiers naturels strictement positifs. On pose $r = \frac{p}{q}$,En calculant $f(q(rx))$ de deux manières différentes, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r.
6. *Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.*
   (a) Construire une suite (x_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 et tellle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in N$.
   (b) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.

7. On suppose dans cette question que f est continue à droite sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
8. On suppose que f est continue à droite en 0, montrer que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et conclure qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

9. On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.
   (a) Montrer que sur $[0, B-A]$, f est minorée de borne inférieure strictement positive.
   (b) Montrer que f est continue à droite de 0.
   (c) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 38 [Croissance et continuité]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si l'image $f(]a, b[)$ est un intervalle.

Exercice 39 [Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.
3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.

   Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est convergente et que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \to +\infty$?

Exercice 40 [Valeur intermédiaire]

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $f(0) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]