

Parcours PEIP
Introduction à l'analyse

MEMENTO
DÉRIVATION

1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I .

On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ ssi le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0 .

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I .

Si f est dérivable sur $J \subset I$, alors on appelle fonction dérivée de f la fonction $f': J \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ pour tout $x \in J$.

2 Formules

– Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur I . Alors

- $f + g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I avec $(f + g)' = f' + g'$;
- $f \cdot g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I avec $(f \cdot g)' = fg' + f'g$;
- si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

$$\left| \begin{array}{l} \hookrightarrow \frac{1}{g} \text{ est dérivable sur } I \text{ avec } \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}. \end{array} \right.$$

– Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables respectivement sur I et J et telles que $\text{Im}(f) \subset J$, alors $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable avec $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

$$\left| \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f^n \text{ est dérivable sur } I \text{ avec } (f^n)' = nf'f^{n-1} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \hookrightarrow \exp(f) \text{ est dérivable sur } I \text{ avec } (\exp(f))' = f' \exp(f) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{si } f \text{ ne s'annule pas, } \ln(|f|) \text{ est dérivable sur } I \text{ avec } (\ln(|f|))' = \frac{f'}{f} \end{array} \right.$$

– Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas, alors $f^{-1}: J \rightarrow I$ est dérivable avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

3 Dérivés usuelles

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \hookrightarrow f': \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{signe}(x) \end{array} \right.$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \hookrightarrow f': \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right.$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n-1} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}_-$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n-1} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array} \text{ pour } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^{a-1} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array} \text{ pour } a \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(a).a^x \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\sin(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

$$\curvearrowright f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sh}(x) \end{array}$$

$$\Big|_{\hookrightarrow} f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ch}(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ch}(x) \end{array}$$

$$\Big|_{\hookrightarrow} f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sh}(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{th}(x) \end{array}$$

$$\Big|_{\hookrightarrow} f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{argsh}(x) \end{array}$$

$$\Big|_{\hookrightarrow} f': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{argch}(x) \end{array}$$

$$\Big|_{\hookrightarrow} f': \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{argth}(x) \end{array}$$

$$\Big|_{\hookrightarrow} f': \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x^2} \end{array}$$