Université Aix-Marseille 2014–2015

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 1

Vendredi 10 octobre 2014

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1, 2 et 3, l'autre les exercices 4 et 5.

Exercice 1. (6 pts)

Donner les domaines de définition maximale dans $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{1-|x-1|} \qquad g : x \mapsto \ln(x-\sqrt{3-x}) \qquad h : x \mapsto \frac{1}{\tan\left(\cos(\sqrt{x})\right)}.$$

Exercice 2. (3 pts)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = 4\sqrt{3}\,\cos^2 x - 6\cos x$.

Exercice 3. (3 pts)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ \\ 2^x = 5y. \end{cases}$$

Exercice 4. (7 pts)

1. Rappeler la définition d'une application surjective.
2. Rappeler les conditions d'existence, ainsi que la définition de l'application réciproque de $f : A \to B$, où A et B sont deux ensembles.
3. Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives ou rien de cela. Le(s) cas échéant(s), déterminer explicitement l'application réciproque.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & |x|-x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3+2x}{2-x} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & 2\,x_1+x_2 \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x+1}{e^x-1} \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

TSVP $\Longrightarrow$

Exercice 5. (3 pts)

On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{1+x^2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} k : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

1. Déterminer, parmi les applications suivantes, lesquelles sont bien définies : $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ g$ et $h \circ k$.
2. Montrer que $f \circ g = h \circ k$.