Université Aix-Marseille	2014–2015

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 2

Vendredi 21 novembre 2014

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre les exercices 3 et 4

Exercice 1. (6 points)
Donner les domaines de dérivabilité des fonctions suivantes, puis les dériver.

$g_1(x) = \operatorname{argth}(x)\,;$ $\qquad g_3(x) = \big(\operatorname{ch}(x)\big)^{\tan(x)}\,;$ $\qquad g_5(x) = \arctan\Big(\ln\big(\sin(x)\big)\Big)\,;$

$g_2(x) = \cos^3(x)\ln(x)\,;$ $\qquad g_4(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x^2+1)}\,;$ $\qquad g_6(x) = \operatorname{argch}\big(1+\sqrt{x}+x\ln^2(x)\big).$

Exercice 2. (4 points)

1. Donner le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos\big(2\arctan(t)\big) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
3. A l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, trouver une primitive de la fonction f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3. (8 points)
Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}\;; \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ch}(x)\cos(x) \end{array}\;;$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+\tan^2(x)+x^3 \end{array}\;; \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4x+1}{x^2+x+1} \end{array}\;;$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos(x) \end{array}\;; \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}.$$

Exercice 4. (2 points)
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\operatorname{argsh}\left(2x\sqrt{x^2+1}\right) = 2\operatorname{argsh}(x).$$