Université Aix-Marseille	2014–2015

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N^o 3

Vendredi 16 janvier 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
L'épreuve dure 2h 30.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1, 2 et 3, l'autre les exercices 4, 5 et 6.

Exercice 1. (4 points)
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants :
   (a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ ;
   (b) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ;
   (c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. On considère $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Montrer, en revenant à la définition, que la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.
3. On suppose à présent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n = \frac{2}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer, en revenant à la définition, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 2. (3 points)

1. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une primitive de la fonction $\big(x \mapsto \ln(1+x^2)\big)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $y'(x) - 2\dfrac{y(x)}{x} = x^2\ln(1+x^2)$.

Exercice 3. (6 points)
Resoudre les équations differentielles suivantes :

1. $(1-x^4)y'(x) + 4xy(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$;
2. $y''(x) + y'(x) + y(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
3. $y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 4. (4 points)

1. Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives ou rien de cela. Dans le ou les cas bijectif(s), déterminer la ou les fonction(s) réciproque(s).
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}^+ \\ n & \mapsto & \ln(n^2+1) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \ln(x^2+1) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & 2\,y + 3\,i\,x \end{array}$$
2. Soit $g : [1,+\infty[\to [2,+\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - \sin(\pi x)$ pour tout $x \geq 1$.
   (a) Montrer que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   (b) Montrer que g est bijective.
   (c) Calculer $g(2)$ et $(g^{-1})'(8)$.

TSVP $\Longrightarrow$

Exercice 5. (3 points)
Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et calculer leurs dérivées :

- $F : x \mapsto \arcsin\left(\frac{f(x)}{f(x)+1}\right)$;
- $G : x \mapsto \cos(3\,f(x) + g(x))$.

Exercice 6. (3 points)
Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $H(x) = \frac{1-e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H(x) \geq -\frac{1}{8}$.
2. Après avoir déterminé son domaine de dérivabilité, calculer la dérivée de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[4]{H(x) + \frac{1}{8}}. \end{array}$$