Université Aix-Marseille 2014–2015

Parcours PEIP
Introduction à l'analyse

Planche 5 : Suites réelles.

Exercice 1. Soit x un réel. On définit $E(x)$ par:

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

a. Calculer $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$.

b. Tracer le graphe de la fonction E.

c. Calculer $\lim nE\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Démontrer que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

e. En déduire un encadrement de $E(x)$ en fonction de x.

f. Soit $x \in \mathbb{R}$; calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(nx)}{n}.$$

Exercice 2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $n^3 - n$ est divisible par 3.

(b) pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

(c) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 3. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

a. La suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

b. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.

c. La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple. Dans tout l'exercice $(u_n)_n$ désigne une suite réelle.
a. Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_n$ est décroissante.
b. Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle est convergente.
c. Si $(|u_n|)_n$ converge vers l, alors $(u_n)_n$ converge vers l ou vers $-l$.
d. Si $\lim u_n = l$ avec $l > 0$ alors $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
e. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

Exercice 5. Déterminer si les suites suivantes sont croissantes ou décroissantes

(a) $u_n := 2n + \sin(n)$.

(b) $v_n := \frac{2^n}{n^2}$.

(c) $w_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(d) $z_0 := 16\,, \quad z_{n+1} := \sqrt{z_n}$.

(e) $a_n := \sqrt{n} + (-1)^n$.

Exercice 6. Etudier la convergence des suites suivantes et déterminer les limites si elles existent.

(a) $n \sin(1/n)$.

(b) $n^4(\cos(n) - 2)$.

(c) $2\cos(n) + 3(-1)^n - 3n$.

(d) $\frac{3n+5(-1)^n}{2n}$.

(e) $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; $n \geq 1$.

(f) $\frac{\sqrt{(1-n)^2+1}}{1-n}, \quad n \geq 2$.

(g) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; $n \geq 1$.

Exercice 7. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ converge.

Exercice 8. (Suite géométrique)
Déterminer la convergence, la divergence ou la non convergence de la suite

$$u_n := a^n\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

en fonction de la valeur de a.

Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Soit $u_0 \geq \sqrt{2}$. On définit la suite (u_n):

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Étudier la fonction f. Vérifier en particulier: $\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) \geq \sqrt{2}$.

(b) Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{2}$.

(c) Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

(d) Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

(e) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 10. Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 12. On considère la suite $(u_n)_n$, définie pour $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer qu'il existe c un nombre réel strictement positif que l'on précisera tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq c.$$

c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.

Exercice 13. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a. Démontrer que $(a_n)_n$ est bien définie et croissante.

b. Prouver que $(b_n)_n$ est décroissante.

c. Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. (*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.*)

Exercice 14. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ converge.

Exercice 15. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

a. Justifier que $(u_n)_n$ est bien définie.

b. Montrer que $(u_n)_n$ ne peut converger que vers un seul nombre ℓ que l'on déterminera.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \ell$.

d. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{P(u_n)}{\sqrt{1+u_n}+u_n}$, où P est un polynôme du second degré que l'on déterminera et dont on étudira le signe. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

e. Prouver que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 16. a) Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers un nombre réels ℓ. Montrer que la suite $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge vers ℓ.
b) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ tel que $(u_n)_n$ n'apas de limite et $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge.
c) Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers ℓ. d) Soit $(u_n)_n$ une suite qui diverge vers $+\infty$. Montrer que $(\frac{u_n}{n})_n$ diverge aussi vers $+\infty$.