Université Aix-Marseille 2015–2016

Parcours CUPGE
Introduction à l'analyse

Cours
Applications

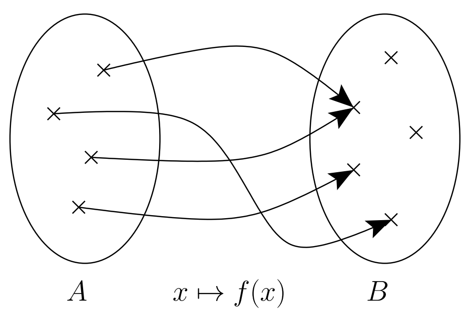
1 Définitions

Définition 1. Une application, c'est la donnée de trois choses :

1. un ensemble de départ A ;
2. un ensemble d'arrivée B ;
3. un processus qui associe individuellement un élément de B à chacun des éléments de A.

Remarque 2. La notion de processus évoqué dans le troisième point est une "simplification" de la vraie définition. Formellement, il s'agit d'un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset A \times B$ vérifiant la propriété suivante : $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \mathcal{F}$. Cela permet de définir l'image de $a \in A$ comme étant cet unique $b \in B$. Mais pour une première approche, il n'est toutefois pas forcément nécessaire de se perdre dans ce formalisme.

Graphiquement, on peut se représenter une application comme ceci :



Les ensembles de départ et d'arrivée sont représentés comme des sacs ouverts vus de dessus, laissant ainsi apparaitre leurs éléments comme des points. Le processus de transformation, par des flèches qui relient chaque point de l'ensemble de départ à son point image. Par construction, il y a donc une unique flèche qui part de chaque point de l'ensemble de départ. Du point de vue de l'ensemble d'arrivée, par contre, plusieurs flèches peuvent pointer au même endroit, et certains points peuvent ne pas être pointé du tout.

Notation 3. Une application f sera notée :

$$f \colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

où A est l'ensemble de départ, B l'ensemble d'arrivée et, pour tout $x \in A$, $f(x)$ est l'élément de B associé à x.

Le processus de transformation pourra être donné

de manière exhaustive :	par une formule :	par un mélange des deux :
$f: \begin{array}{ccc} \{a,b,c\} & \to & \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & -2 \\ c & \mapsto & 1 \end{array}\;;$	$g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}\;;$	$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \geq 0 & \mapsto & \sin(x) \\ x < 0 & \mapsto & x \end{array}\;.$

Dans le dernier cas, on pourra aussi écrire

$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Parfois, la définition de la transformation $\big(x \mapsto f(x)\big)$ pourra s'avérer plus sophistiquée. On pourra par exemple rencontrer

$$p\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow &]0,1[\\ n & \longmapsto & \begin{array}{c}\text{l'unique solution entre 0 et 1} \\ \text{de l'équation } t^n + t - 1 = 0\end{array} \end{array}$$

Il arrivera que le processus de transformation ne soit pas donné explicitement. On notera alors $f : A \to B$.

Dans le cadre des *fonctions réelles* (à variable et valeurs réelles), il arrivera également que les ensembles de départ et d'arrivée soient sous-entendus ou laissés à la discrétion du lecteur. On pourra alors écrire $\big(x \mapsto f(x)\big)$. Dans ce cas, on sous-entendra que l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, et que l'espace de départ est le *domaine de définition* de f, c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ soit défini pour tout $x \in I$.

Exemples 4.

- Le domaine de définition de $\big(x \mapsto \sqrt{x}\big)$ est $\mathbb{R}_+$.
- Le domaine de définition de $\big(x \mapsto \frac{1}{x}\big)$ est $\mathbb{R}^*$.
- Le domaine de définition de $\big(x \mapsto \tan(x)\big)$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\big[$.

Pour toute application $f : A \to B$, il est toujours possible de réduire A et de ne plus considérer l'application que sur un sous-ensemble $A' \subset A$. On parle alors de la restriction de f à A', que l'on note $f_{|A'}$ mais que l'on continuera parfois, par abus de notation, à noter f. A l'inverse, il est également toujours possible d'étendre l'espace d'arrivée à tout ensemble qui contient B.

Voici quelques exemples d'applications importantes.

- Les fonctions réelles usuelles, par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

- Les opérations usuelles sur les ensembles de nombres, par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n_1,n_2) & \longmapsto & n_1+n_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1x_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \frac{x_1}{x_2} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,n) & \longmapsto & z^n \end{array}$$

2 Opérations

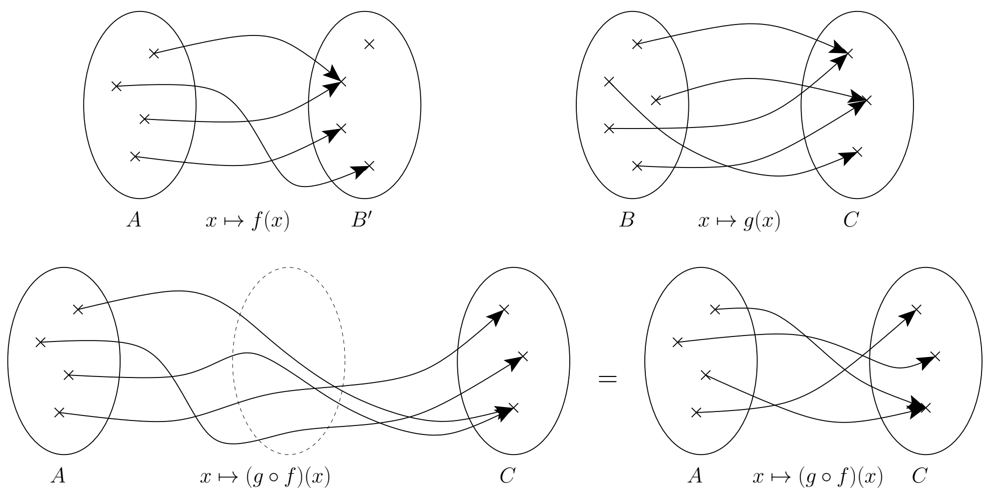
Lorsque cela est bien défini, on peut vouloir effectuer deux processus de transformation successivement :

Définition 5. Soit $f\colon A \longrightarrow B'$ et $g\colon B \longrightarrow C$ deux applications telles que l'espace d'arrivée B' de f soit inclu dans l'espace de départ B de g. On définit alors *l'application composée* $g \circ f$ par

$$g \circ f\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

La composition $g \circ f$ consiste à appliquer f puis g. L'ordre semble inversée dans la notation $g \circ f$ mais cela correspond au sens de lecture dans $g\big(f(x)\big)$. La condition $B' \subset B$ est essentielle pour que l'image par g de $f(x)$ ait toujours un sens.

Graphiquement, chaque flèche de $g \circ f$ correspond au recollement d'une flèche de f avec une flèche de g :



Exemples 6.

- Si l'on considère f : {véhicule motorisé} $\to$ {plaque d'immatriculation} et g : {plaque d'immatriculation} $\to$ {départements}, alors $g \circ f$ associe à tout véhicule son département d'imatriculation.
- Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) := 1 + x^2$ et $g(x) := x + \cos(x)$, alors $(g \circ f)(x) = \big(1 + x^2 + \cos(1 + x^2)\big)$. L'expression de $g \circ f$ s'obtient en remplaçant x par $f(x)$ dans l'expression de g.
- Si f est une fonction réelle et g l'application $\big(x \mapsto \frac{1}{x}\big)$, alors $g \circ f$ est l'application $\big(x \mapsto \frac{1}{f(x)}\big)$. Mais attention, g n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$, donc pour que cela ait un sens, il faut absolument que f ne s'annule pas.

Si $f, g : A \to B$ sont deux applications et que B est munie d'une opération $*$ (on pourra penser à $B = \mathbb{R}$ et $* = +$ ou .), alors on peut définir $f * g\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) * g(x) \end{array}$. Notamment dans le cas réel, cela permet de définir les opérations suivantes :

Définition 7. Pour toutes fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, on définit

- la somme $f + g : I \cap J \to \mathbb{R}$ par $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;

- le produit $f.g : I \cap J \to \mathbb{R}$ par $(f.g)(x) := f(x)g(x)$.

Sauf très rares exceptions, toutes les fonctions réelles que l'on considérera dans ce cours s'exprimeront à l'aide des fonctions usuelles et des opérations $+$, $.$, ι : $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ et $\circ$. Par exemple, la fonction f : $\left(x \mapsto \frac{e^x + \cos(\sqrt{x})}{\ln(x^2)}\right)$ peut se décrire comme $\left(\exp + \cos \circ \sqrt{\ }\right) \times \left(\iota \circ \ln \circ (\mathrm{Id}.\mathrm{Id})\right)$. Une telle décomposition est essentielle pour déterminer le domaine de définition. Dans cet exemple, le produit n'est défini que si les deux composantes sont définies ;

- la composante de gauche est une somme qui n'est définie que si chacun des termes est définies :
  - le terme de gauche est exp, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$;
  - le terme de droite est la composé de cos avec $\sqrt{\ }$ qui n'est définie qu'en les $x \in \mathbb{R}$ tels que
    - $\sqrt{\ }$ soit définie en x, il faut donc $x \in \mathbb{R}_+$;
    - cos soit définie en $\sqrt{x}$, ce qui ne donne pas de condition ;
- la composante de droite est la composé de ι avec $\ln \circ (\mathrm{Id}.\mathrm{Id})$ qui n'est définie qu'en les $x \in \mathbb{R}$ tels que
  - $\ln \circ (\mathrm{Id}.\mathrm{Id})$, la composé de ln avec Id.Id, soit définie en x, c'est-à-dire tels que
    - le produit de Id par elle-même soit définie, ce qui ne donne pas de condition ;
    - ln soit définie en x^2, c'est-à-dire tels que $x^2 > 0$ ou encore $x \neq 0$;
  - ι est définie en $\ln(x^2)$, c'est-à-dire tels que $\ln(x^2) \neq 0$, ce qui donne $x^2 \neq 1$ ou encore $x \neq \pm 1$.

Au final, pour que $f(x)$ soit définie, il faut que $x \in \mathbb{R}_+$, $x \neq \pm 1$ et $x \neq 0$. On en déduit que le domaine de définition de f est $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

3 Propriétés

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux différentes configurations possibles de flèches par rapport aux points de l'espace d'arrivée. Mais avant cela, donnons la définition suivante :

Définition 8. Soit $f \colon A \longrightarrow B$ une application. On appelle antécédent de $y \in B$ par f tout élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

3.1 Injectivité

On veut interdire les configurations où plusieurs flèches pointent vers le même point.

Définition 9. Une application $f \colon A \longrightarrow B$ est dite *injective* si

$$\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

La condition ci-dessus indique que si deux flèches arrivant au même point partent nécessairement du même point, il s'agit donc de la même flèche. Autrement dit, il ne peut pas y avoir deux flèches qui pointent vers le même point. Une façon de reformuler cela est de dire que tout point de l'espace d'arrivée possède <u>au plus</u> un antécédent par f. Notons que si un point de B n'a pas d'antécédent, alors il ne peut pas être écrit sous la forme $f(x)$ et la condition ci-dessus n'indique rien à son sujet. Ce cas n'est donc pas interdit.

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f\colon A \longrightarrow B$ est injective, on pourra revenir à la définition et considérer deux points x et y (potentiellement égaux ou non) de A tels que $f(x) = f(y)$ et manipuler cette dernière égalité pour montrer que cela implique $x = y$.
Pour montrer qu'elle n'est pas injective, il suffira d'exhiber deux points distincts ayant la même image.

Exemples 10.

1. L'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$ est injective. En effet, considérons $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow (x+1)(y-1) = (y+1)(x-1) \Rightarrow xy+y-x-1 = yx+x-y-1 \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y.$$

2. L'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$.

⚠ : L'injectivité ou la non injectivité d'une application dépend fortement de son espace de départ, et pas seulement du processus de transformation. En effet, on a vu que g ci-dessus n'est pas injective, mais $g_{|\mathbb{R}_+}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est. De manière générale, en en considérant une restriction, toute application peut être rendue injective : il suffit d'enlever de l'espace de départ tous les antécédents surnuméraires. Notons toutefois que cela génère un choix arbitraire ; en effet, $g_{|\mathbb{R}_-}$ est également injective.

Voyons maintenant un critère simple d'injectivité.

Définition 11. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow B$ une application
On dit que f est croissante (resp. décroissante) si, pour tout $x, y \in A$, $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) \leq f(y)$).
On dit que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si, pour tout $x, y \in A$, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).
On dit que f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante)

Proposition 12. *Toute application strictement monotone est injective.*

Démonstration. Raisonnons par contraposé en montrant que si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. En effet, si $x \neq y$, alors $x > y$ ou $x < y$. Quitte à intervertir leurs rôles, on peut supposer que $x > y$. Mais alors si f est strictement croissante, on a $f(x) > f(y)$ et si f est strictement décroissante, on a $f(x) < f(y)$. Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(y)$. □

3.2 Surjectivité

On veut interdire les configurations où des points de l'espace d'arrivée ne sont pointés par aucune flèche.

Définition 13. Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est dite *surjective* si
$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

Une façon de reformuler cela est de dire que tout point de l'espace d'arrivée possède au moins un antécédent par f. Notons que la condition ci-dessus n'interdit pas l'existence de plusieurs flèches pointant vers le point considéré. Les notions d'injectivité et de surjectivité sont donc indépendantes.

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f\colon A \longrightarrow B$ est surjective, on pourra donner, pour tout $y_0 \in B$, une solution à l'équation $f(x) = y_0$.
Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, il faudra exhiber une valeur $y_0 \in B$ donné telle que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.

Exemples 14.

1. L'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ est surjective. En effet, pour tout $y_0 \geq 1$, on a
$$\begin{aligned} f(x) = y_0 &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = y_0 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 = y_0^2 \text{ car } y_0 \geq 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y_0^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y_0^2-1} \text{ car } y_0^2 - 1 \geq 0. \end{aligned}$$
Il y a donc au moins une solution (dans ce cas, il y en a même deux).

2. L'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective car, $y_0 = -1$, l'équation $x^2 = y_0 = -1$ n'a pas de solution.

⚠ : La surjectivité ou non d'une application dépend fortement de ses espaces de départ et d'arrivée, et pas seulement du processus de transformation. En effet, on a vu que g ci-dessus n'est pas surjective, mais $\widetilde{g}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est et $\widetilde{g}_{|[1,+\infty[}\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ne l'est plus.

Voyons maintenant comment transformer toute application en application surjective.

Définition 15. Pour tout application $f\colon A \longrightarrow B$, on définit l'image de f, notée $\mathfrak{Im}(f)$, par $\mathfrak{Im}(f) := \{y \in B \big| \exists x \in A, y = f(x)\}$.

⚠ : il ne faut pas confondre l'image de f et l'image $f(x)$ de x par f. Le second est un élément de l'espace d'arrivée tandis que le premier est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. C'est le sous-ensemble des éléments qui ont au moins un antécédent. Les propositions suivante sont donc immédiates.

Proposition 16. *Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est surjective si et seulement si $B = \mathfrak{Im}(f)$.*

Proposition 17. *Pour toute application $f\colon A \longrightarrow B$, l'application $\widetilde{f}\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathfrak{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est surjective.*

⚠ : Lorsque f n'est pas surjective, l'application $\widetilde{f}$ est différente de f car elles ne possèdent pas le même ensemble d'arrivée. C'est pourquoi on utilise une notation (légèrement) différente. Il arrivera cependant que, par abus de notation, on utilise la même notation, même après modification de l'espace d'arrivée.

3.3 Bijectivité

Définition 18. Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est dite *bijective* si elle est injective et surjective.

D'après les sections précédentes, une fonction f est bijective si tout point de l'espace d'arrivée de f possède <u>au plus</u> et <u>au moins</u> un antécédent par f. Cela revient à dire qu'il possède <u>exactement</u> un antécédent par f. On a donc :

Proposition 19. *Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est bijective si et seulement si*

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f\colon A \longrightarrow B$ est bijective, on pourra bien sûr montrer qu'elle est injective et indépendemment qu'elle est surjective. Une autre possibilité sera de montrer que, pour tout $y_0 \in B$, l'équation $f(x) = y_0$ possède une unique solution x dans A.
Pour montrer qu'elle n'est pas bijective, on pourra ou bien exhiber une valeur $y_0 \in B$ telle que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution, ou bien deux valeurs distinctes $x_1 \neq x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemple 20. $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$ est bijective. En effet, pour tout $y_0 \neq 2$, on a

$$\begin{array}{rcll} f(x) = y_0 & \Leftrightarrow & \frac{2x+1}{x-1} = y_0 & \\ & \Leftrightarrow & 2x+1 = y_0(x-1) & \text{car } x \neq 1 \\ & \Leftrightarrow & 1 + y_0 = x(y_0 - 2) & \\ & \Leftrightarrow & x = \frac{1+y_0}{y_0-2} & \text{car } y_0 \neq 2. \end{array}$$

Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, il y a donc exactement une solution et f est bijective.

Remarque 21. En étudiant l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application $f\colon A \longrightarrow B$, on se pose les questions suivantes :

Injectivité	**Surjectivité**	**Bijectivité**
L'équation $f(x) = y_0$ peut-elle avoir plusieurs solutions ?	L'équation $f(x) = y_0$ a-t-elle toujours des solutions ?	L'équation $f(x) = y_0$ a-t-elle toujours une unique solution ?

On s'intéresse donc toujours à la même équation, mais en se posant des questions différentes.

Nous avons vu qu'une application strictement monotone est injective et que, quitte à modifier l'espace d'arrivée, on peut la rendre surjective. Il s'ensuit le résultat suivant :

Proposition 22. *Une application strictement monotone est une bijection sur son image.*

Par ailleurs, il sera vu au second semestre, dans l'UE "Analyse I" que :

- une application dérivable sur un intervalle et dont la dérivé ne s'annule pas est strictement monotone ;
- une application dérivable est continue ;
- l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

De tout cela, on déduit que :

Proposition 23. *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I avec $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathfrak{Im}(f)$ est un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}\colon I \longrightarrow J$ est une bijection.*

De plus, J n'est déterminé que par les bords $a < b$ de I dans le sens où

$J =$

- $f' > 0$
  - I fermé en a
    - I fermé en b → $\left[f(a), f(b)\right]$
    - I ouvert en b → $\left[f(a), \lim_{x\to b} f(x)\right[$
  - I ouvert en a
    - I fermé en b → $\left]\lim_{x\to a} f(x), f(b)\right]$
    - I ouvert en b → $\left]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)\right[$
- $f' < 0$
  - I fermé en a
    - I fermé en b → $\left[f(b), f(a)\right]$
    - I ouvert en b → $\left]\lim_{x\to b} f(x), f(a)\right]$
  - I ouvert en a
    - I fermé en b → $\left[f(b), \lim_{x\to a} f(x)\right[$
    - I ouvert en b → $\left]\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x)\right[$

Remarque 24. La conclusion de la proposition précédente reste vraie si f' s'annule en un nombre fini de points mais sans jamais changer de signe.

Exemple 25. L'application $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ ne s'annulant qu'en 0. De plus, on a $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$. On en déduit que $f : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est une bijection.

⚠ : le raisonnement ci-dessus ne fonctionne que sur $\mathbb{R}_+$ et, en effet, quand bien même elle est définie sur $\mathbb{R}$, f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$.

Nous terminons cette section par la remarque qu'il est toujours possible de modifier les espaces de départ et d'arrivée d'une application pour la transformer en une bijection sur son image. A titre d'exemple, la fonction $f \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est absolument pas une bijection, mais $\widetilde{f} \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est.

4 Application réciproque

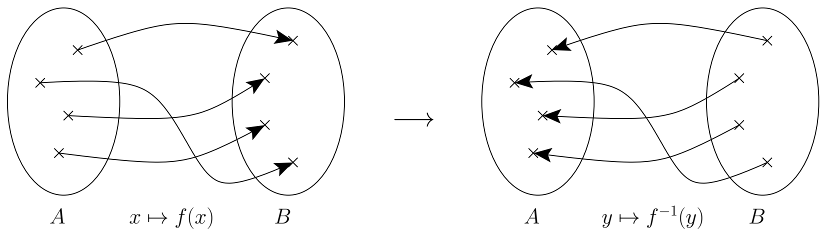
Dans cette section, nous considérons une application $f \colon A \longrightarrow B$ <u>bijective</u>.

Notation 26. On appelle *fonction réciproque* de f, notée f^{-1}, l'application

$$f^{-1} \colon \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & \begin{array}{c}\text{l'unique } x \in A \\ \text{tel que } y = f(x)\end{array} \end{array}.$$

On remarquera que la condition "f bijective" est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit bien définie de manière unique.

Graphiquement, une application réciproque est obtenu en renversant les flèches de la fonction initiale. En effet, le fait qu'une application soit bijective signifie que tout point de l'espace d'arrivée possède une unique flèche pointant dessus. En la remontant, on tombe sur l'unique antécédent du point en question :



Parcourir successivement une flèche dans les deux sens mène alors à la propriété suivante :

Proposition 27. *On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$, càd $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in A$, et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$, càd $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ pour tout $x \in B$.*

Démonstration. Par définition et pour tout $y_0 \in B$, $f^{-1}(y_0)$ est l'élément $x \in A$ tel que $f(x) = y_0$. On a donc $f\big(f^{-1}(y_0)\big) = y_0$.

De plus, pour $y_0 = f(x_0)$ avec $x_0 \in A$, on a également, par unicité de la solution de l'équation $f(x) = y_0$, que $f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0$. □

Réciproquement, on a :

Proposition 28. *Soit $g\colon A \longrightarrow B$ et $h\colon B \longrightarrow A$ deux applications tels que $h \circ g = \mathrm{Id}_A$ et $g \circ h = \mathrm{Id}_B$. Alors g est bijective et $g^{-1} = h$.*

Démonstration. Montrons que g est injective : soit $x, y \in A$ tels que $g(x) = g(y)$. On a alors $h\big(g(x)\big) = h\big(g(y)\big)$, càd $x = y$.

Montrons que g est surjective : soit $y \in B$, on a $g\big(h(y)\big) = y$ donc $h(y)$ est un antécédent de y par g.

L'application g est donc bijective et le dernier argument montre même que $h(y)$ est bien l'unique antécédent de y par g, càd $g^{-1}(y)$. □

Remarque 29. Une application réciproque est définie par la résolution d'équations, à savoir $f(x) = y_0$. Lorsqu'aucune solution explicite (c'est à dire décrite à l'aide de fonctions connues au préalable) de ces équations n'est connue, cela nécessite d'introduire une nouvelle fonction. C'est le cas de la fonction "racine carrée" définie comme la réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. A contrario, il peut arriver qu'une fonction réciproque puisse être décrite explicitement. Dans l'exemple 20, les calculs menés montre que $f^{-1}(y) = \frac{1+y}{y-2}$.

Remarque 30. L'application réciproque échange le rôle des espaces de départ et d'arrivée ainsi que les notions d'image et d'antécédent. De fait, dans le cas réel, le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f en faisant la symétrie par rapport à la droite diagonale croissante d'équation $y = x$ car cette symétrie échange les axes des abscisses et des ordonnées tout en respectant le signe de chacun.