Université Aix-Marseille 2015–2016

Parcours CUPGE
Introduction à l'analyse

MEMENTO
DÉRIVATION

1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I.

On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ ssi le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Si f est dérivable sur $J \subset I$, alors on appelle fonction dérivée de f la fonction $f'\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ pour tout $x \in J$.

2 Formules

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur I. Alors
  - $f+g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I avec $(f+g)' = f' + g'$;
  - $f.g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I avec $(f.g)' = fg' + f'g$;
  - si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}$

    ↳ $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
- Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables respectivement sur I et J et telles que $\mathfrak{Im}(f) \subset J$, alors $g \circ f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable avec $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

  ↳ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est dérivable sur I avec $(f^n)' = nf'f^{n-1}$

  ↳ $\exp(f)$ est dérivable sur I avec $\big(\exp(f)\big)' = f' \exp(f)$

  ↳ si f ne s'annule pas, $\ln(|f|)$ est dérivable sur I avec $\big(\ln(|f|)\big)' = \frac{f'}{f}$
- Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas, alors $f^{-1}\colon J \longrightarrow I$ est dérivable avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

3 Dérivés usuelles

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

↳ $$f'\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{signe}(x) \end{array}$$

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

↳ $$f'\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n-1} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}_-^*$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n-1} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array} \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^{a-1} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array} \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(a).a^x \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\sin(x) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

$$\Lsh f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{sh}(x) \end{array}$$

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x) \end{array}$$

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{sh}(x) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{th}(x) \end{array}$$

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{argsh}(x) \end{array}$$

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{argch}(x) \end{array}$$

$$f' : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{argth}(x) \end{array}$$

$$f' : \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x^2} \end{array}$$