Université Aix-Marseille 2015–2016

Parcours CUPGE
Introduction à l'analyse

Memento
Fonctions usuelles

1 Exponentielle et dérivés

1.1 Logarithme

Definition

On appelle logarithme (népérien) l'unique fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$.

On appelle logarithme décimale l'unique fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(10) = 1$.

⚠ : dans certains livres, la notation log pourra être utilisé pour le logarithme népérien et Log pour le logarithme décimal. Vérifiez toujours la définition.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$
Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{x}$
Primitives : $x \mapsto x\big(\ln(x) - 1\big) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

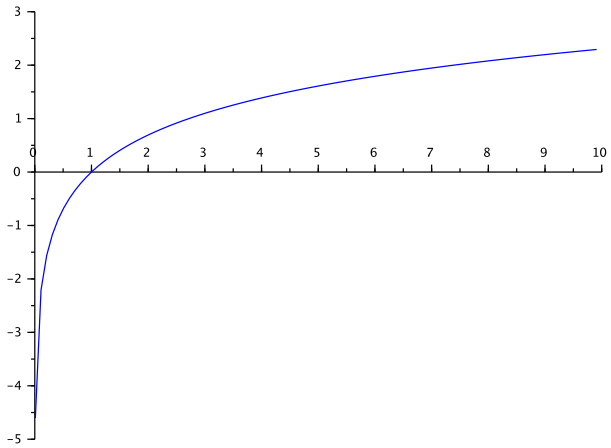
Limites

- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \ln(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$ pour tout $\alpha > 0$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha > 0$

Valeurs particulières

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$ avec e la constante de Néper

Graphe



Propriétés

- ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$

1.2 Exponentielle

Definition

L'application exponentielle est définie comme la réciproque $\exp := \ln^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ de l'application logarithme.

Selon les livres, on pourra lui trouver, de manière équivalente, les définitions suivantes :

- l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivé est égale à elle-même et valant 1 en 0 ;
- l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ transformant une somme en produit et valant la constante d'Euler en 1 ;
- la fonction sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Du fait de l'égalité entre ces deux fonctions, on note souvent e^x, avec e la constante de Néper, pour $\exp(x)$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto \exp(x)$
Primitives : $x \mapsto \exp(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

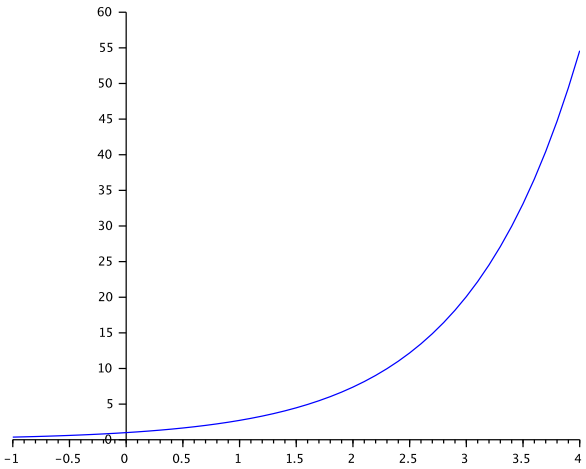
Limites

- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0$ pour tout $\alpha > 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = \infty$ pour tout $\alpha > 0$

Valeurs particulières

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e$ avec e la constante de Néper

Graphe



Propriétés

- exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$
- $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $\exp\big(\ln(a)\big) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln\big(\exp(a)\big) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

1.3 Fonctions puissances

Definition

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b := e^{b\ln(a)}$.

Si $b \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de la mise en puissance usuelle, à ce détail près que cette dernière est définie pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Si b est de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de la racine $n^{\text{ième}}$.

Pour tout étude analytique, on se ramènera à l'étude des fonctions logatithme et explonentielles en utilisant la forme $e^{b\ln(a)}$.

Propriétés

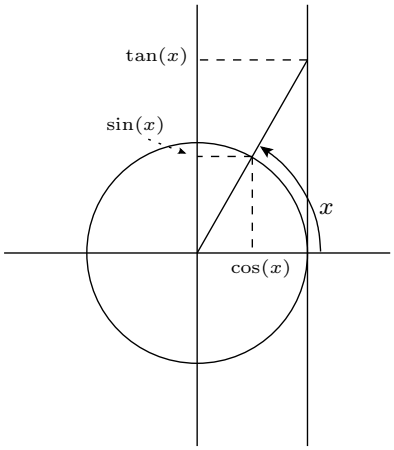
- $a^{b+c} = a^b a^c$ pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
- $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$
- $a^{bc} = \big(a^b\big)^c$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

2 Fonctions trigonométriques directes

2.1 Sinus

Definition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\sin(x)$ l'ordonnée du point obtenu après avoir parcouru une distance $|x|$ sur le cercle unité en partant de $(1,0)$ et en suivant le sens trigonométrique si $x \geq 0$ et le sens des aiguilles d'une montre sinon. Cela correspond également au point M du cercle unité tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle égale à x radians modulo 2π, avec O l'origine du plan et A le point de coordonnées $(1,0)$.



Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto \cos(x)$
Primitives : $x \mapsto -\cos(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

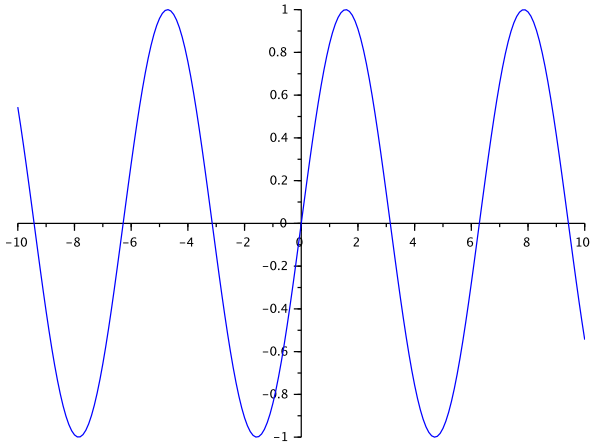
Valeurs particulières

- $\sin(0) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Graphe



Propriétés

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2.2 Cosinus

Definition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\cos(x)$ l'abscisse du point obtenu après avoir parcouru une distance $|x|$ sur le cercle unité en partant de $(1, 0)$ et en suivant le sens trigonométrique si $x \geq 0$ et le sens des aiguilles d'une montre sinon. Cela correspond également au point M du cercle unité tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle égale à x radians modulo 2π, avec O l'origine du plan et A le point de coordonnées $(1, 0)$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto -\sin(x)$
Primitives : $x \mapsto \sin(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

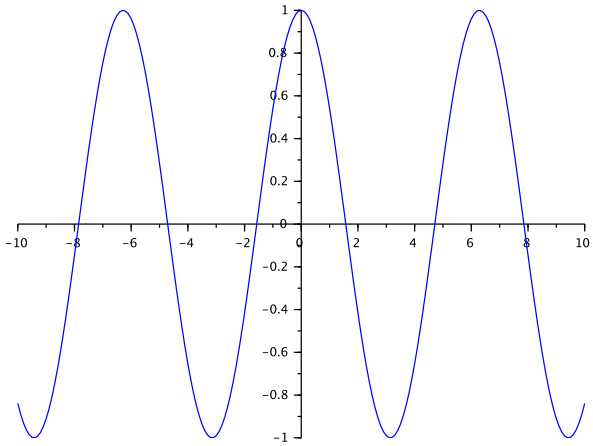
Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Valeurs particulières

- $\cos(0) = 1$
- $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Graphe



Propriétés

- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2.3 Tangente

Definition

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$, on note $\tan(x)$ l'abscisse de l'intersection de la droite verticale passant par $(1, 0)$ et la droite passant par l'origine et le point obtenu après avoir parcouru une distance $|x|$ sur le cercle unité en partant de $(1, 0)$ et en suivant le sens trigonométrique si $x \geq 0$ et le sens des aiguilles d'une montre sinon. Cela correspond également au point M du cercle unité tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle égale à x radians modulo 2π, avec O l'origine du plan et A le point de coordonnées $(1, 0)$.

Une autre définition équivalente est de poser $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$
Dérivé : $x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Primitives : $x \mapsto -\log\big(\cos(x)\big) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

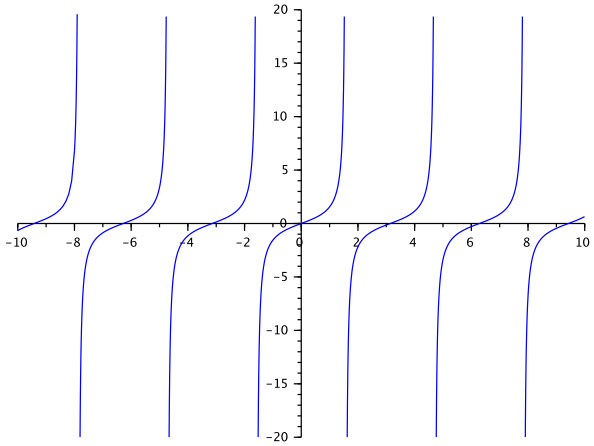
Valeurs particulières

- $\tan(0) = 0$
- $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

Graphe



Propriétés

- $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

2.4 Formulaire

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a+b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \middle| k \in \mathbb{Z} \setminus \{4k | k \in \mathbb{Z}\}\right\}$
- $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

3 Fonctions trigonométriques réciproques

3.1 Arcsinus

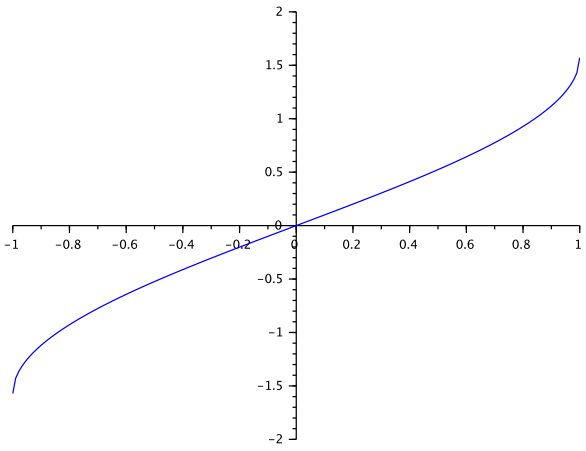
Definition

On appelle $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction réciproque de la fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $]-1,1[$
Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Primitives : $x \mapsto x.\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe



Propriétés

- $\arcsin$ est bijective de $[-1,1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$
- $\sin\big(\arcsin(x)\big) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$
- $\arcsin\big(\sin(x)\big) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ (2k+1)\pi - x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$

3.2 Arccosinus

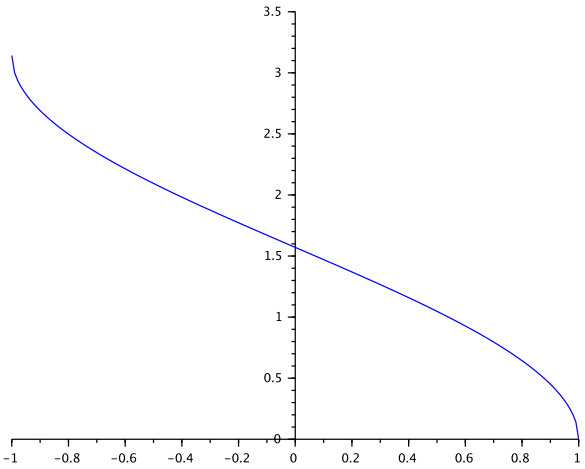
Definition

On appelle arcos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ la fonction réciproque de la fonction cos : $[0,\pi] \to [-1,1]$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $]-1,1[$
Dérivé : $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Primitives : $x \mapsto x.\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe



Propriétés

- arcos est bijective de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$
- $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$
- $\arccos\big(\cos(x)\big) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi - x & \text{si } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$
- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$

3.3 Arctangente

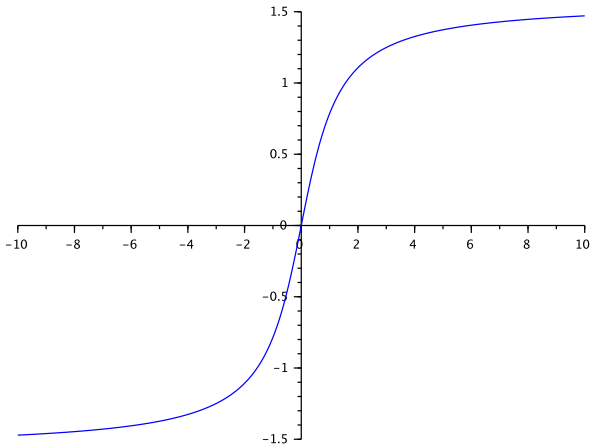
Definition

On appelle arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction réciproque de la fonction tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
Primitives : $x \mapsto x.\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe



Propriétés

- arctan est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\tan\big(\arctan(x)\big) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\arctan\big(\tan(x)\big) = x - k\pi$ si $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x).\frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

4 Fonctions hyperboliques directes

4.1 Sinus hyperbolique

Definition

On appelle sinus hyperbolique la fonction $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est parfois également notée sinh.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto \text{ch}(x)$
Primitives : $x \mapsto \text{ch}(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

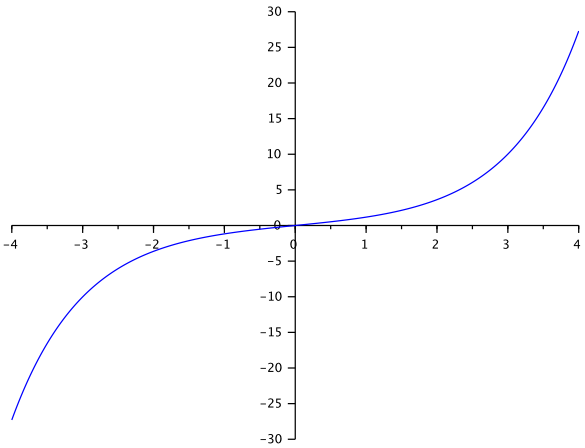
Limites

- $\lim\limits_{x \to \infty} \text{sh}(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = 1$

Valeurs particulières

- $\text{sh}(0) = 0$

Graphe



Propriétés

- sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $\text{sh}(-a) = -\text{sh}(a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$

4.2 Cosinus hyperbolique

Definition

On appelle cosinus hyperbolique la fonction $\text{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est parfois également notée cosh.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto \text{sh}(x)$
Primitives : $x \mapsto \text{sh}(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

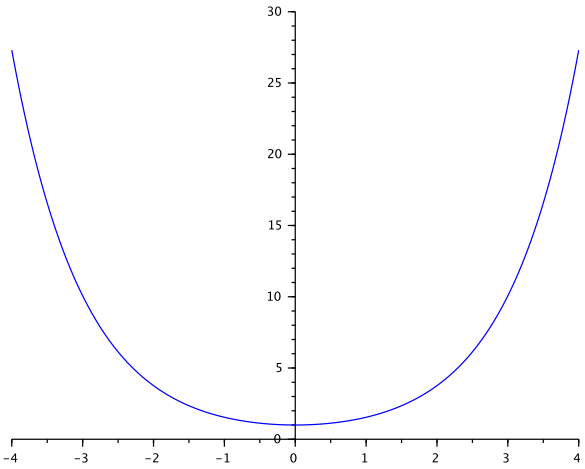
Limites

- $\lim\limits_{x \to \infty} \text{sh}(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Valeurs particulières

- $\text{ch}(0) = 1$

Graphe



Propriétés

- ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$
- $\text{ch}(-a) = \text{ch}(a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$

4.3 Tangente hyperbolique

Definition

On appelle tangente hyperbolique la fonction th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{th}(x) := \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est parfois également notée tanh.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$
Primitives : $x \mapsto \ln\big(\text{ch}(x)\big) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

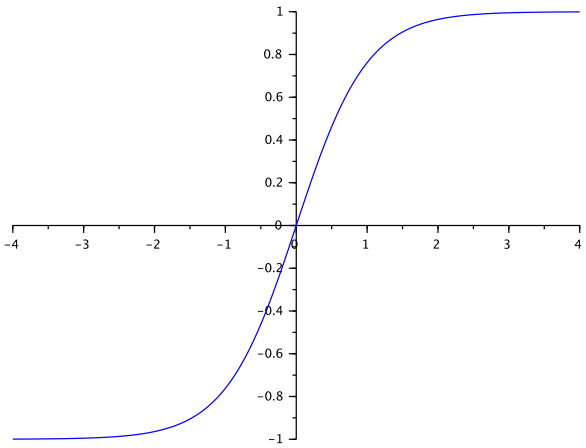
Limites

- $\lim\limits_{x \to \infty} \text{sh}(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{th}(x)}{x} = 1$

Valeurs particulières

- $\text{th}(0) = 0$

Graphe



Propriétés

- th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$
- $\text{th}(-a) = -\text{th}(a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$

4.4 Formulaire

- $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\big(\text{ch}(x) + \text{sh}(x)\big)^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $\text{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$, $\cos(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $\text{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$
- $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\text{sh}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{th}(a+b) = \frac{\text{th}(a)+\text{th}(b)}{1+\text{th}(a)\text{th}(b)}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = 2\text{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\text{sh}^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{th}(2x) = \frac{2\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(a) + \text{ch}(b) = 2\text{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\text{ch}(a) - \text{ch}(b) = 2\text{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{sh}(a) + \text{sh}(b) = 2\text{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\text{sh}(a) - \text{sh}(b) = 2\text{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

5 Fonctions hyperboliques réciproques

5.1 Argsinus hyperbolique

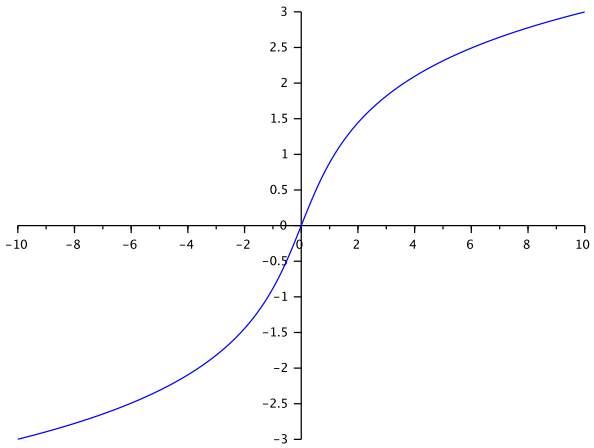
Definition

On appelle argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la fonction sh.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Primitives : $x \mapsto x.\text{argsh}(x) - \sqrt{x^2+1} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe



Propriétés

— argsh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
— $\text{argsh}(-x) = -\text{argsh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
— $\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

5.2 Argcosinus hyperbolique

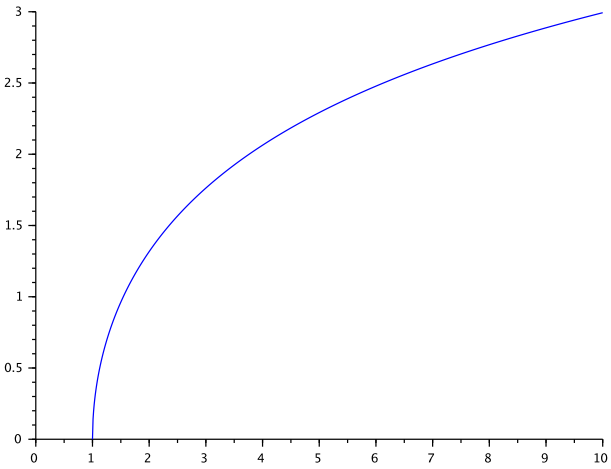
Definition

On appelle argch : $[1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction réciproque de la fonction ch : $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $]1, +\infty[$
Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Primitives : $x \mapsto x.\text{argch}(x) - \sqrt{x^2-1} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe



Propriétés

— argch est bijective de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$
— $\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour tout $x \in [1, +\infty[$

5.3 Argtangente hyperbolique

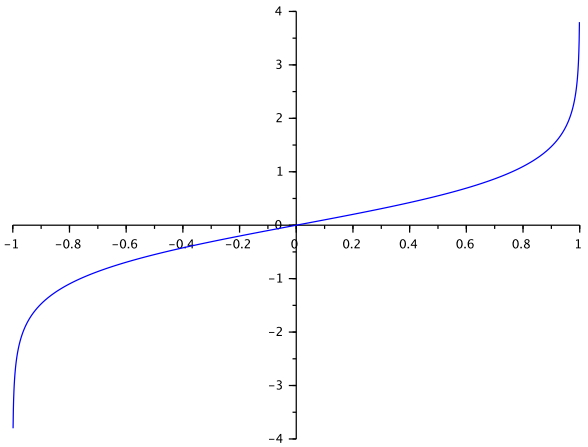
Definition

On appelle argth $:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la fonction th $: \mathbb{R} \to]-1, 1[$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $]-1, 1[$
Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
Primitives : $x \mapsto x.\text{argth}(x) + \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe



Propriétés

— argth est bijective de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$
— $\text{argth}(-x) = -\text{argth}(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$
— $\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$

6 Quelques formules

— $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1}}{a-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
— $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
  — $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  — $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  — $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
— $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
  — $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
  — $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
  — $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
— $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$