Université Aix-Marseille 2015–2016

Parcours CUPGE
Introduction à l'analyse

Cours
Quelques notations

1 Notations d'ensembles

Vous connaissez déjà un certain nombre d'ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Nous ne rentrerons pas dans les détails d'une définition formel de ce qu'est un ensemble. On se contentera de comprendre cela comme un "sac" qui contient des éléments. Notons toutefois que ce "sac" peut contenir une infinité d'éléments, comme par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Il peut également contenir d'autres sacs, comme par exemple l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$: chaque intervalle est lui-même un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A est un ensemble, on notera $x \in A$ pour signifier que x est un élément de A.

Conventionellement, pour décrire un ensemble, on encadre par des accolades la description de ce qu'est un élément de cet ensemble. On notera, par exemple, {habitant de Marseille} l'ensemble des habitants de Marseille car un élément de cet ensemble est un habitant de Marseille et que tout habitant de Marseille est un élément de cet ensemble.

Dans le cas particulier d'un ensemble fini possédant peu d'élément, on pourra mettre entre accolade la liste exhaustive des éléments. Par exemple, on pourra noter $\{a, b, c, d, e\}$ l'ensemble des cinq premières lettres de l'alphabet latin.

Il arrivera souvent qu'on définisse un ensemble A comme un sous-ensemble d'un autre ensemble B. Cela signifie que chacun des éléments de A est aussi un élément de B ; on notera alors $A \subset B$. En particulier, on pourra définir A comme étant l'ensemble des éléments de B vérifiant une certaine propriété particulière, par exemple {nombre réel dont le carré est strictement plus grand que 1}. Bien entendu, plutôt qu'une longue phrase, on pourra vouloir écrire {nombre réel x tel que $x^2 > 1$} ou encore $\{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 > 1\}$. Dans ce cas, on peut noter "tel que" par une grande barre verticale. Cela donne alors $\{x \in \mathbb{R} | x^2 > 1\}$.

Il se peut enfin que la description des éléments d'un ensemble nécessite l'intervention de paramètres. On les utilise alors dans la description des éléments de l'ensemble, mais on précise leur nature à droite de la barre verticale. L'ensemble des multiples de π pourra donc s'écrire $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Bien entendu, toutes ces notations peuvent se mêler. L'ensemble des multiples de π dont le carré est strictement plus grand que 1 pourra, par exemple, s'écrire $\left\{k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}, (k\pi)^2 > 1\right\}$.

Enfin, par convention, on note $\emptyset$ l'unique ensemble, dit vide, qui ne contient rien.

⚠ : Les ensembles d'ensembles peuvent être pernicieux. On pourra remarquer que $\emptyset \neq \{\emptyset\} \neq \big\{\{\emptyset\}\big\}$. En effet, le premier est un sac vide. Le second est un sac qui contient un sac vide et le troisième un sac qui contient un sac qui contient un sac vide.

⚠ : On sera attentif à ne pas confondre un ensemble et un élément de cet ensemble. En particulier, un ensemble qui ne contient qu'un seul élément n'est pas égal à cet élément. On pourra, pour s'en convaincre, se référer au fait qu'un sac qui contient une bille n'est physiquement pas la même chose que la bille toute seule.

Il existe plusieurs façons de combiner deux ensembles A et B pour en décrire de nouveaux :

- la réunion $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- l'intersection $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$;
- la différence $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$;
- la différence symmétrique $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

De plus, s'il est (éventuellement de manière implicite) entendu que $A \subset B$, on appelera complémentaire de A dans B, noté $A^{\complement}$, l'ensemble $B \setminus A$.

Bien entendu, toutes ces opérations peuvent être répétées autant de fois que l'on souhaite, donnant lieu à de nombreuses formules :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \ ; \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ ; \ (A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement} \ ; \ A \Delta B = (A^{\complement} \cap B) \cup (A \cap B^{\complement}) \dots$$

Il se peut même que ces opérations soient utilisées une infinité de fois : $\left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[1, 1 + \frac{1}{2}\right[\cup \left[2, 1 + \frac{1}{3}\right[\cup \left[3, 1 + \frac{1}{4}\right[\cup \cdots$. On décrira alors chacun des ensembles sous une même forme à l'aide de paramètres que l'on indiquera sous ou en indice du signe de l'opération. Dans l'exemple précédent cela donnera $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \left[k, 1 + \frac{1}{k+1}\right[$.

Il existe une autre opération permettant de combiner deux ensembles A et B : le produit cartésien défini par $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Bien entendu, cette construction est valide si $A = B$. C'est, par exemple, ainsi que l'on définit le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$. Il faut toutefois être alors attentif à l'ordre des termes qui est important ; en effet, deux couples (a, b) et (a', b') ne sont égaux que si $a = a'$ et $b = b'$.

2 Notations de logique

2.1 Quantificateurs

L'objectif des notations suivantes est de mettre en place un langage écrit évitant toute forme d'ambiguité.

Dans ce qui suit, on appellera *proposition* toute affirmation portant sur des objets, par exemple "le carré d'un nombre réel est toujours positif", "$\sqrt{2}$ est irrationnel" ou "le logarithme d'un réel strictement positif est toujours positif". Notons qu'une proposition n'est pas nécessairement vraie. Le troisième exemple est, par exemple, faux mais cela ne nous empêche pas de l'énoncer.

On pourra prendre une notation pour une proposition, par exemple P, et l'on pourra même, au besoin, préciser $P(x)$ si cette affirmation porte sur un objet x. Par exemple, on pourra noter $P(x)$ l'affirmation "$\cos(x) > 0$".

Bien entendu, dans ce dernier exemple, la proposition $P(x)$ n'a pas de sens en elle-même car on ne sait pas qui est x, on ne peut donc absolument pas savoir si $\cos(x)$ est positif ou non. Afin de corriger cela, on introduit les notations suivantes :

- si l'on veut affirmer que $P(x)$ est vrai pour tous les x d'un ensemble E, on écrira :$\forall x \in E, P(x)$;
- si l'on veut affirmer qu'il y a au moins un élément (éventuellement plusieurs) x d'un ensemble E tel que $P(x)$ soit vrai, on écrira :$\exists x \in E, P(x)$;
- si l'on veut affirmer qu'il y a un et un seul élément x d'un ensemble E tel que $P(x)$ soit vrai, on écrira :$\exists! x \in E, P(x)$.

On appelle $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ des quantificateurs.

Chacune de ces trois affirmations est une nouvelle proposition et est donc susceptible d'être soumis à des quantificateurs. On peut donc combiner des quantificateurs et affirmer, par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. L'affirmation se lit alors de gauche à droite en "Pour tout réel x, on peut trouver un réel y tel que la somme $x + y$ soit strictement positif". Dans cette affirmation, le y peut tout à fait dépendre de x car il est introduit après x. De fait, l'affirmation est vraie car on peut prendre, par exemple, $y = 1 - x$.

⚠ : Du fait de la remarque précédente, l'ordre des quantificateurs est important. Par exemple, $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est faux car il faudrait trouver un réel y tel que $x + y$ soit positif pour TOUT x, en particulier pour $x = -1 - y$, ce qui est faux.

⚠ : Si une proposition parle d'une variable, par exemple x, elle doit nécessairement être précédé d'un quantificateur portant sur ce x car sinon on ne sait pas de qui on parle et cela n'a pas de sens.

Par convention et pour toute proposition $P(x)$ portant sur une variable x, on considère que la proposition "$\forall x \in \emptyset, P(x)$" est vraie. Mais attention, car l'ensemble vide peut parfois être déguisé.

2.2 Implications et équivalences

Si P et Q sont deux propositions, on note $P \Rightarrow Q$ la proposition qui affirme que "si P est vrai, alors Q est vrai". Mais attention, elle n'affirme rien d'autre que cette phrase, et donc elle n'affirme notamment rien si P est fausse. En effet, on parle ici d'une logique statique, donc non dynamique, et respectant le principe du tiers exclu : toute proposition est donc soit "éternellement vraie", soit "éternellement fausse". C'est donc notamment le cas pour les propositions P et Q qui sont, indépendemment l'une de l'autre, chacune ou bien vraie ou bien fausse. La proposition $P \Rightarrow Q$ n'affirme donc pas qu'il existe un processus occulte transformant Q en proposition vraie dès lors que P est vraie, il s'agit juste d'une nouvelle proposition qui n'est "éternellement vraie" que si les états respectifs de véracité de P et Q sont compatibles avec cette affirmation "si P est vrai, alors Q est vrai" : si P est effectivement vraie, alors Q doit être vraie, mais si P est fausse, alors $P \Rightarrow Q$ n'affirme plus rien, et donc Q peut être indifféremment vraie ou fausse.

En résumé, $P \Rightarrow Q$ est vraie si

- ou bien P et Q sont vraies ;
- ou bien P est fausse et Q est vraie ;
- ou bien P et Q sont fausses.

Elle n'est par contre fausse que si P est vraie et Q est fausse.
Ainsi, si l'on sait déjà que P est vraie et que $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q ne peut être que vraie.

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ affirme simultanément $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. Pour que l'une des deux au moins soit fausse, il faut soit que P soit fausse et Q vraie, soit que Q soit fausse et P vraie. Autrement dit, il faut que les états de véracités de P et Q diffèrent. A l'inverse, pour que $P \Leftrightarrow Q$ soit vraie, il faut que les propositions soient ou bien simultanément vraies, ou bien simultanément fausses.

2.3 Négation

Pour toute proposition P, on appelle négation de P la proposition qui affirme que P est fausse. Dans la litterature, la négation de P peut être notée non(P), $\neg P$ ou $\overline{P}$.

Remarques 1.

1. La proposition "P et Q" affirme que P et Q sont simultanément vraies. Dire que cela est faux, c'est dire que l'une au moins des deux est fausse, c'est-à-dire que soit P soit Q est fausse.

2. La proposition "P ou Q" affirme que, parmi P et Q, l'une au moins est vraie. Dire que cela est faux, c'est dire que les deux sont fausses.

On déduit de ces remarques que, pour toute proposition P sur les éléments d'un ensemble E, on a

- $\neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$;
- $\neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ et } \neg Q)$.

Remarques 2.

1. La proposition "$\forall x \in E, P(x)$" affirme que $P(x)$ est vraie pour tous les éléments de E. Dire que cela est faux, c'est dire que l'on peut trouver un contre-exemple x_0 dans E tel que $P(x_0)$ soit fausse, c'est-à-dire que tel que $\neg P(x_0)$ est vraie.

2. La proposition "$\exists x \in E, P(x)$" affirme que $P(x)$ est vraie pour au moins un élément de E. Dire que cela est faux, c'est dire que $P(x)$ est fausse pour tous les éléments de E, c'est-à-dire que $\neg P(x)$ est vraie pour tout les éléments de E.

On déduit de ces remarques que, pour toute proposition P sur les éléments d'un ensemble E, on a

- $\neg(\forall x \in E, P) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P$;
- $\neg(\exists x \in E, P) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P$.

Si une proposition commence par plusieurs quantificateurs, on fera donc récursivement la négation de chacun de ces quantificateurs. Par exemple, la négation de "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$" est "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$".

⚠ : La négation de $P \Rightarrow Q$ affirme que $P \Rightarrow Q$ est fausse, or on a vu que cela n'arrivait que si P est vraie et que Q est fausse. On a donc $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg Q)$.

3 Un exemple important : bornes d'ensembles réels

A titre d'exemple, nous allons introduire quelques notions essentielles en analyse qui utilisent les notations précédentes. A cet effet, on ne va plus considérer que des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Définition 1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On dit que M est un majorant de A si : $\forall x \in A, x \leq M$. On dit que A est majoré s'il possède un majorant.
On note $\text{maj}(A) := \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majorants de } A\}$ l'ensemble des majorants de A.
On dit que m est un minorant de A si : $\forall x \in A, x \geq M$. On dit que A est minoré s'il possède un minorant.
On note $\text{min}(A) := \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ minorants de } A\}$ l'ensemble des minorants de A.
On dit que A est borné s'il est majoré et minoré.

Proposition 2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

- *Si A possède un majorant (resp. un minorant), alors il en possède une infinité.*

- (A *borné*) $\Leftrightarrow$ ($\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq M$).
- ($\mathrm{maj}(A) = \emptyset$) $\Leftrightarrow$ (A *n'est pas majoré*) *et* ($\min(A) = \emptyset$) $\Leftrightarrow$ (A *n'est pas minoré*).
- ($\mathrm{maj}(A) = \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ ($A = \emptyset$) $\Leftrightarrow$ ($\min(A) = \mathbb{R}$).

Définition 3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'un élément de A est maximal (resp. minimal) si c'est un majorant (resp. minorant) de A. On parle aussi de plus grand (resp. petit) élément.

⚠ : Certains ensembles $A \subset \mathbb{R}$ n'admettent pas d'élément maximal ou minimal, par exemple $\mathbb{R}$ ou l'intervalle $]-1, 1[$.

Proposition 4. *Si $A \subset \mathbb{R}$ possède un élément maximal (resp. minimal), alors il est unique.*

Théorème 5 (propriété fondamentale des nombres réels)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide majoré (resp. minoré), alors* $\mathrm{maj}(A)$ *(resp.* $\min(A)$*) est de la forme* $[a, +\infty[$ *(resp.* $]-\infty, a]$*).*

Corollaire 6. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si* $\mathrm{maj}(A)$ *(resp.* $\min(A)$*) est non vide et distinct de $\mathbb{R}$, alors il possède un plus petit (resp. grand) élément.*

Définition 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide majoré (resp. minoré), alors on appelle borne supérieure (resp. inférieure) de A, notée $\sup(A)$ (resp. $\min(A)$) le plus petit (resp. grand) des majorants (resp. minorants) de A.

Proposition 8. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

- *Si elle existe,* $\sup(A)$ *(resp.* $\inf(A)$*) est unique.*
- *Si A est non vide majoré, alors* (A *admet un élément maximal*) $\Leftrightarrow$ ($\sup(A) \in A$).
- *Si A est non vide minoré, alors* (A *admet un élément minimal*) $\Leftrightarrow$ ($\inf(A) \in A$).
- *Si elle existe,* $\sup(A)$ *est l'unique majorant α de A vérifiant* $\forall \beta < \alpha, \exists x \in A, x > \beta$.
- *Si elle existe* $\inf(A)$ *est l'unique minorant α de A vérifiant* $\forall \beta > \alpha, \exists x \in A, x < \beta$.