Université Aix-Marseille 2015–2016

Parcours CUPGE - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 1

Mardi 3 novembre 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (2 points) Donner la définition de

1. un minorant pour un sous-ensemble de $\mathbb{R}$;
2. la composée de deux applications ;
3. une application injective ;
4. la fonction tangente hyperbolique.

Exercice 2. (3 points) Décomposer en sommes, produits et composés de fonctions élémentaires la fonction

$$\left(x \mapsto \frac{e^{\tan(x^2)}}{\operatorname{ch}\left(1+\ln(-x^2+5x-6)\right)}\right),$$

puis déterminer son domaine de définition. On pourra noter $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par $P(x) = -x^2 + 5x - 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la considérer comme "application élémentaire".

Exercice 3. (3 points) Soit A et B deux ensembles, et soit $f : A \to B$ une application injective. Pour tout sous-ensemble X de A, on note $f(X) := \left\{f(x) \in B \mid x \in X\right\}$ l'image de X par f.

Montrer que, pour tout $X, Y \subset A$, on a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercice 4. (5 points) Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives et celles qui sont surjectives. Dans le cas d'une application bijective, donner son application réciproque :

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right) \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi,\pi[\\ x & \longmapsto & \pi\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\operatorname{th}(x)\right) \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(x) \end{array}.$$

Exercice 5. (3 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2(x) + \sin(2x) = 2$.

Exercice 6. (4 points)

1. (a) Rappeler la formule exprimant, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sin(\alpha) - \sin(\beta)$ comme un produit.

   (b) En déduire que, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

   $$\sin(\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right).$$

   (c) En déduire que, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

   $$\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma) = \sin(\alpha+\beta+\gamma) + 4\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right).$$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\sin(x) + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = 0.$$

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\sin(3x) = 4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right).$$