Université Aix-Marseille	2015–2016

PARCOURS CUPGE - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Mardi 1er décembre 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Quelques rappels

— Aucune variable n'est universelle.
— Un nombre n'est pas une fonction.
— La division par zéro n'existe pas.
— Une abbrévation, c'est personnelle.
— Une formule simplifiée vaut mieux que dix formules brutes.

Exercice 1. (5 points) Pour chacune des fonctions suivantes , donner une primitive sur le domaine précisée :

1. $f : x \mapsto x^3 + \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $g : x \mapsto 1 - \mathrm{th}^2(x)$ sur $]-1, 1[$;
3. $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$;
4. $k : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
5. $l : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$;
6. $m : x \mapsto \frac{e}{1-x^2}$ sur $]1, +\infty[$;

Exercice 2. (4 points) Déterminer une primitive de la fonction $F\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x^2)\cos(x) \end{cases}$.

Exercice 3. (4 points) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+t^2}$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $G\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \end{cases}$.

Exercice 4. (7 points) On considère la fonction $H\colon \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^5+3x^3+5x^2+x+6}{x(x+1)(x^2-2x+3)} \end{cases}$.

1. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+3}\right)$.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\left(x \mapsto \frac{x}{x^2-2x+3}\right)$.
3. Décomposer $H(x)$ en somme d'éléments simples.
4. Donner les primitives sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ de H.

Exercice 5. (4 points) On admettra qu'il existe $\alpha_0 \in]0, \pi[$ telle que $\alpha_0^2 = \sin(\alpha_0)$, $x^2 < \sin(x)$ si $x \in]0, \alpha_0[$ et $x^2 > \sin(x)$ si $x \in]\alpha_0, \pi[$. Vous pourrez utiliser α_0 comme une constante connue, sans chercher à la calculer.

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \ln\left(\frac{x+\sqrt{\sin(x)}}{x-\sqrt{\sin(x)}}\right)$.

1. Déterminer la dérivée de φ.
2. Montrer que si φ' s'annule en x_0, alors $x_0 = 2\tan(x_0)$.