Université Aix-Marseille	2015–2016

Parcours CUPGE - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 3

Mercredi 16 décembre 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Quelques rappels

- Aucune variable n'est universelle.
- Un nombre n'est pas une fonction.
- La division par zéro n'existe pas.
- Une abbrévation, c'est personnel.
- Une formule simplifiée vaut mieux que dix formules brutes.

Exercice 1. (2 points) Donner la définition de :

1. une application surjective ;
2. la borne inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$;
3. la fonction arctan ;
4. une équation différentielle linéaire homogène de degré 1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 2. (4 points)

1. Déterminer si l'application suivante est injective et/ou surjective :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{ll} -x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \end{cases} .$$

2. Modifier les espaces de départ et d'arrivée de l'application

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{cases}$$

de sorte à la rendre bijective sans pour autant modifier son image.

Exercice 3. (4 points) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$;
2. $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 4. (12 points)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = \sin(2x).$$

   indice : on pourra chercher une solution sous la forme $\big(x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)\big)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

2. Résoudre sur $]0,1[$ l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{y(x)}{(1-x^2)\operatorname{argth}(x)} = \arctan(x)\operatorname{argth}(x).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$x(x^2+2x+2)y'(x) - 2(x^2+x)y(x) = (x^4+x^3+2x^2+x+4)(x^2+2x+2).$$

   indice : il n'y aucune solution polynomiale