CUPGE
Introduction à l'analyse

PLANCHE 1 - ENSEMBLES & LOGIQUE

Exercice 1. Soit $A := \{1, 2, 3\}$ et $B := \{0, 1, 3\}$. Décrire exhaustivement $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ et $A \times B$.

Exercice 2. Soit $A :=]-\infty, 3]$, $B :=]-2, 7]$ et $C :=]-5, +\infty[$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \setminus B$, A^c , $A^c \cap B^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3. Soit A , B et C , trois sous-ensembles d'un même ensemble E . Montrer que

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
4. $A \Delta B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$;
5. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$, $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;
6. $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$, $(A \cup B) \Delta (A \cup C) = A^c \cap (B \Delta C)$.

Exercice 4. Soit A , B , C et D quatre ensembles.

1. Montrer que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
2. Montrer que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$. Trouver un cas d'inclusion stricte et un cas d'égalité.

Exercice 5. Soit A , B et C trois ensembles tels que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Exercice 6.

1. Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses :
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy > 0$.
 - (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy > 0$.
 - (c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + y > xy) \Rightarrow (y > 0)$.
 - (d) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, (x + y > xy) \Rightarrow (y > 0)$.
 - (e) $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}, kx \in \mathbb{Z})$.
2. Ecrire la négation des propositions précédentes.

Exercice 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si A possède un majorant, alors il en possède une infinité.

2. Montrer que si A possède un plus grand élément, alors il est unique.

3. Montrer que si elle existe, $\sup(A)$ est unique.

Exercice 8. Soit $A := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A est bornée.

2. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

3. Déterminer si A possède un plus grand élément et/ou un plus petit élément.

Exercice 9. Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$

Exercice 10. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A)$ est l'unique majorant α de A vérifiant $\forall \beta < \alpha, \exists x \in A, x > \beta$.

Exercice 11. Soit A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A := \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \mid x_1, \dots, x_n > 0 \right\}$.

1. Montrer que A est minoré.

2. (a) Montrer que, pour tout $a, b > 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

(b) En déduire que, pour tout $x_1, \dots, x_n > 0$, $(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$.

(c) En conclure que $\inf(A) = n^2$