Université Aix-Marseille 2015–2016

CUPGE
Introduction à l'analyse

PLANCHE 2 - APPLICATIONS

Exercice 1.

1. On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{2^n}{n+1} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 3n \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$$

   Lorsque ceci a un sens, donner l'expression de $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ g$, $g \circ h$.

2. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

   Montrer que $g \circ f = -g$.

Exercice 2.
On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{1-|x-1|} \qquad g : x \mapsto \ln(x-\sqrt{3-x}) \qquad h : x \mapsto \frac{x}{\tan\big(\cos(\sqrt{x})\big)}$$

$$k : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)} - \sin(\sqrt{x})} \qquad l : x \mapsto \frac{\ln\big(\exp(x^2)-1\big)}{x^2-1}) \qquad m : x \mapsto \frac{\cos(x)e^{x\ln(\sin(x))}}{1+\tan(x)}$$

1. Décomposer-les en sommes, produits, inverses et composés de fonctions élémentaires.
2. Déterminer leur domaine de définition.

Exercice 3.
On considère les fonctions suivantes :

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

$$k\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array} \qquad l\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln(1+e^x)} \end{array} \qquad m\colon \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{e^x+1}{e^x-1} \end{array}$$

$$n\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x)-2\mathrm{sh}(x) \end{array} \qquad p\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x|-x \end{array} \qquad q\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 3^n-2^n \end{array}$$

1. Déterminer celles qui sont injectives et/ou surjectives.
2. Pour celles qui sont bijectives, déterminer leur application réciproque.

Exercice 4.
Soit A, B et C trois ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications et on note $h = g \circ f : A \to C$ l'application composée.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors h est surjective.
3. Montrer que si h est injective, alors f est injective.
4. Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.

Exercice 5.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}} \qquad\qquad 2^{2x+1} - 3^x = 3^{x+1} - 2^{2x}.$$

Exercice 6.
1. Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. En déduire que pour tout $\alpha, \beta > 1$, on a $\sqrt{\ln(\alpha)\ln(\beta)} \leq \ln\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)$.

Exercice 7.
1. Rappeler la définition géométrique du cosinus et du sinus.
2. (a) Justifier géométriquement que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer l'ensemble des x tels que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$.
3. (a) Justifier géométriquement que $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$ et $\sin(x - y)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(y)$.
   (c) En déduire $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. (a) Pour tout x qui convient, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ et une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
5. Pour tous p et q, montrer les formules

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

6. Montrer que, avec $t = \tan\frac{x}{2}$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 8.
Résoudre les équations

$$\cos\left(2x - \tfrac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right) \qquad \cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right)$$
$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = -1 \qquad \tan 3x = \tan x$$
$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \qquad \cos^4(x) + \sin^4(x) = 1.$$

Exercice 9.
Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A\cos x + B\sin x = r\cos(x - \varphi).$$

Exercice 10.
Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11.
Calculer

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right) \qquad \arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) \qquad \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) \qquad \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right).$$

Exercice 12.
Calculer, pour tout x tel que ce soit défini,

$$\cos\big(\arccos(x)\big) \qquad \sin\big(\arcsin(x)\big) \qquad \cos\big(\arcsin(x)\big) \qquad \sin\big(\arccos(x)\big)$$
$$\cos\big(\arctan(x)\big) \qquad \sin\big(\arctan(x)\big) \qquad \tan\big(\arccos(x)\big) \qquad \tan\big(\arcsin(x)\big)$$

Exercice 13.

1. Soient $a, b > 0$ tels que $ab < 1$. Déterminer un nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan c = \arctan a + \arctan b$.
2. Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 14.

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, calculer $\cosh(x)\cosh(y)$, $\sinh(x)\sinh(y)$ et $\cosh(x)\sinh(y)$.
2. En déduire des expressions de $\cosh(x+y)$, $\cosh(x-y)$, $\sinh(x+y)$ et $\sinh(x-y)$ en fonction de $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(y)$ et $\sinh(y)$.
3. En déduire des expressions pour $\cosh(x) + \cosh(y)$, $\sinh(x) + \sinh(y)$ et $\cosh(x) + \sinh(y)$.
4. Montrer que, avec $t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a

$$\cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \tanh(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 15.

1. Montrer que, pour tout $x \in [1, \infty[$, on a $\sinh\big(\operatorname{argsh}(x)\big) = \sqrt{x^2 - 1}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cosh\big(\operatorname{argsh}(x)\big) = \sqrt{x^2 + 1}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\cosh\big(\operatorname{argth}(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\sinh\big(\operatorname{argth}(x)\big) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 16.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) + \operatorname{argth}(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{2 - x^2}\right)$.

Exercice 17.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\alpha_x := \arccos\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right)$.

1. Montrer que $0 \leq \alpha_x < \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $1 + \tan^2(\alpha_x) = \cosh^2(x)$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a $\arccos\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right) = \arctan\left(\sinh(x)\right)$.