Introduction à l'Analyse
 Parcours CUPGE
 PLANCHE 3 - DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Dérivées.

Exercice 1.

Déterminer les domaines de dérivabilités des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivés :

$$f : x \mapsto e^x \ln(\sin(x)) \quad g : x \mapsto \sqrt{|1-x^2|} \quad h : x \mapsto \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right) \quad k : x \mapsto 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

Exercice 2.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^x \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x\sqrt{3}} \sin(x) \end{array} \quad h_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2(1+x)^n \end{array}$$

2. En dérivant n fois l'expression $x^{2n} = x^n x^n$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{k}.$$

Exercice 3.

En dérivant, montrez les égalités suivantes :

1. $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour } x \in]0, +\infty[\\ -\frac{\pi}{2} & \text{pour } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$
2. $2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in]0, 1[$.
3. $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \ln x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
4. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\arcsin x$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Exercice 4.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sinh x + \ln(\cosh x)$ est une bijection. Que vaut $f^{-1}(0)$?
2. Calculer la dérivée de sa fonction réciproque f^{-1} en 0.

Primitives.

Exercice 5.

Donner, sur leur domaine de définition, les primitives pour chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^6$;

5. $x \mapsto x \cos(x^2)$;

2. $x \mapsto \frac{1}{x}$;

6. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$;

3. $x \mapsto \cos^2(x)$;

7. $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$;

4. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$;

8. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$.

Exercice 6.

Donner, en intégrant par parties et sur leur domaine de définition, une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x \cos(x)$;

5. $x \mapsto e^x \cos(x)$;

2. $x \mapsto x^2 e^x$;

6. $x \mapsto x \arctan(x)$;

3. $x \mapsto \ln(x)$;

7. $x \mapsto \arcsin^2(x)$;

4. $x \mapsto x^2 \ln(x)$;

8. $x \mapsto \sin(x) \sinh(x)$.

Exercice 7.

Donner, sur leur domaine de définition, les primitives pour chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$;

3. $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+2x+3)}$;

2. $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$;

4. $x \mapsto \frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-6}$.

Exercice 8.

Donner, à l'aide des changements de variables proposés et sur les domaines précisés, une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $\left(x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $t = \sqrt{x}$;

2. $\left(x \mapsto \tan^4(x)\right)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ avec $t = \tan(x)$;

3. $\left(x \mapsto \frac{1}{x(x^3+1)^2}\right)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ avec $t = x^3 + 1$;

4. $\left(x \mapsto \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}\right)$ sur $\mathbb{R}$ avec $t = e^x$;

5. $\left(x \mapsto \frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}\right)$ sur $]0, \frac{\pi}{3}[$ avec $t = \cos(x)$;

6. $\left(x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}\right)$ sur $]-\pi, \pi[$ avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$;

7. $\left(x \mapsto \frac{1}{2+\cos(x)}\right)$ sur $]-\pi, \pi[$ avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$;

8. $\left(x \mapsto \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ sur $]-2, 2[$ avec $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.