Université Aix-Marseille 2015–2016

Parcours CUPGE - **Introduction à l'analyse**

Examen de rattrapage

Lundi 20 juin 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (7 pts)

1. Déterminer, en le justifiant, le domaine de définition maximale de la fonction réelle suivante

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+e^{\operatorname{argth}(x)}}{1+\cos(5\pi x)}\right).$$

2. On considère la fonction $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sh}(1+x)\cos\left(e^{x+1}\right) \end{cases}$.

   (a) En cherchant à maximiser ou à minimiser le cosinus, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ tels que

   $$g(x_n) = \frac{4n^2\pi^2 - 1}{4\pi n} \qquad \text{et} \qquad g(y_n) = \frac{1-(2n+1)^2\pi^2}{(4n+2)\pi}.$$

   (b) En déduire que g est surjective.

   (c) Déterminer si g est bijective.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 2. (5 pts)

1. Rappeler les conditions de dérivabilité puis la formule de dérivation en un point de la réciproque d'une fonction réelle bijective et dérivable.

2. Déterminer une primitive de la fonction $p\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x\operatorname{sh}(x) \end{cases}$.

3. A l'aide du changement de variable $s = \sqrt{e^t - 1}$, donner une primitive de la fonction

$$q\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{e^x - 1} \end{cases}.$$

Exercice 3. (4 pts)

On considère les fonctions f et g définie par $f(x) = 2\operatorname{argth}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ et $g(x) = \operatorname{sg}(x)\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ avec

$$\operatorname{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sin(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \sin(x) = 0 \\ -1 & \text{si } \sin(x) < 0 \end{cases}$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 4. (5 pts)

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + \left(\frac{1}{x} - 2x\right)y = 1$.