

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

COURS

Introduction

Géométrie au collège : raisonnez de tête ne suffit pas, il faut faire des dessins. Mais raisonner sur des figures peut être trompeur, il faut formaliser les choses.

Démarche inverse : sur les dessins, les points sont faciles et les vecteurs plus abstraits ; dans le formalisme, on prendra le contre-pied car les vecteurs sont linéaires donc plus facile (existence d'un zéro absolu) et les points seront plus abstraits.

Linéaire vs affine : dans l'espace, on rend égalitaire tous les points, on oublie la spécificité de zéro (ou inversement, tout le monde peut être zéro) ; dans les formules, on rajoute des termes constants aux combinaisons linéaires.

1 Géométrie affine

On travaille *a priori* sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, mais on pensera surtout au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Espaces et sous-espaces affines

L'essence du caractère "affine" réside dans le fait qu'à deux points, on peut associer un vecteur, et que les vecteurs sont linéaires. La définition va donc se baser là-dessus.

Définition 1. Soit E un espace vectoriel, on appelle *espace affine* d'espace directeur E tout ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une application

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto \overrightarrow{xy}\end{aligned}$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in \mathcal{E}, \forall u \in E, \exists ! y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} = u$;
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles).

La première condition indique que, une fois un point base donné, l'ensemble des points est en bijection avec l'ensemble des vecteurs.

La seconde condition indique que ce choix d'un point base n'a pas de conséquence car changer de point correspond à tout "translater" par un même vecteur.

Cela peut pousser à donner une définition alternative d'un espace affine.

Définition 2. Soit E un espace vectoriel, on appelle *espace affine* d'espace directeur E tout ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une action fidèle et transitive de E sur $\mathcal{E}$.

Rappel 3.

- L'action (à droite) d'un groupe commutatif G sur un ensemble X est une application $\cdot : X \times G \longrightarrow X$ vérifiant
 - $\forall x \in X, x + 0 = x$;
 - $\forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G, (x + g_1) + g_2 = x + (g_1 + g_2)$.
- On dit que l'action est transitive si $\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = x + g$.
- On dit que l'action est libre si $\forall g \in G, (\exists x \in X, x + g = x) \Rightarrow (g = 0)$.
- On dit que l'action est fidèle si $\forall g \in G, (\forall x \in X, x + g = x) \Rightarrow (g = 0)$.
- Si une action est transitive, alors fidèle $\Rightarrow$ libre $\Rightarrow (\forall x, y \in X, \exists! g \in G, y = x + g)$.

Démonstration.

1^{ère} $\Rightarrow$: Soit $x \in X$ tel que $x + g = x$. Alors, par transitivité, pour tout $y \in X$, il existe $h \in G$ tel que $y = x + h$ et on a

$$y + g = (x + h) + g = x + (h + g) = x + (g + h) = (x + g) + h = x + h = y.$$

2^{nde} $\Rightarrow$: si $x + g_1 = y = x + g_2$, alors

$$x + (g_1 - g_2) = (x + g_1) + (-g_2) = (x + g_2) + (-g_2) = x + (g_2 - g_2) = x + 0 = x$$

et donc $g_1 - g_2 = 0$, c'est-à-dire $g_1 = g_2$ par liberté. $\square$

Proposition 4. Les deux définitions sont équivalentes.

Démonstration. Si on se donne $\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}$, alors on définit l'action de $u \in E$ sur $x \in \mathcal{E}$ par $x + u :=$ l'unique $y \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = u$.

Si on se donne une action de E sur $\mathcal{E}$ alors, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, il existe $u \in E$ tel que $x + u = y$ par transitivité, et ce u est unique par liberté. On pose alors $\overrightarrow{xy} := u$. $\square$

Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire explicite, $\mathcal{E}$ (et à l'occasion $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, etc) sera un espace affine d'espace directeur E (F, G , etc). On utilisera librement et indistinctement les notations $\overrightarrow{xy}$ et $x + u$.

Exemple 5. Tout espace vectoriel E est naturellement muni d'une structure affine par

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & v - u \end{array}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$) est un espace affine de dimension n .

A l'inverse, tout espace affine n'est pas naturellement muni d'une structure vectorielle car cela nécessite de choisir arbitrairement un point base.

Exemple 6. L'espace $\mathcal{E} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \cos(x).f(x) = 1 + \sin(x)\}$ est un espace affine d'espace directeur $E := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \cos(x).f(x) = 0\}$.

Exemple 7. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $x \in \mathcal{E}$. Alors $x + F := \{x + u \mid u \in F\}$ est un espace affine d'espace directeur F .

Ce dernier exemple justifie la définition suivante.

Définition 8. On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si il existe $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $x \in \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{F} = x + F$.

Proposition 9. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. Le sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que $\mathcal{F} = x + F$ pour un certain $x \in \mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par $F = \{\vec{xy} \mid x, y \in \mathcal{F}\}$.

Remarque 10. Le point x , par contre, n'est pas unique, on peut, en effet, prendre n'importe quel point de $\mathcal{F}$.

Définition 11. On appelle espace directeur d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ l'unique sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que $\mathcal{F} = x + F$ pour un certain $x \in \mathcal{E}$.

On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles si l'un des deux espaces directeur est inclu dans l'autre.

Exemples 12.

- Deux droites parallèles dans le plan.
- Une droite et un plan parallèles dans l'espace.

Proposition 13. Une intersection (quelconque) de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ est soit vide soit un sous-espace affine d'espace directeur l'intersection des espaces directeurs.

Corollaire 14. Deux sous-espaces affines parallèles sont soit disjoints soit inclus l'un dans l'autre.

Définition 15. Soit $X \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble (non nécessairement affine) de $\mathcal{E}$. On appelle, sous-espace affine engendré par X , noté $\text{Aff}(X)$ l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant X . Cela correspond au plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X .

Exemples 16.

- Les sous-espaces affines engendrés par un, deux, trois points.
- Les sous-espaces affines engendrés par les réunions de sous-espaces affines :
 - deux droites dans le plan ;
 - deux droites dans l'espace ;
 - une droite et un plan dans l'espace.

Proposition 17. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H} := \text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Soit F, G et H les espaces directeurs respectifs de $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Alors

1. $\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{G}, H = F + G + k.\vec{xy}$;
2. $(H = F + G) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{G}, \vec{xy} \in F + G) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset)$.

Dans le cadre affine, et le cas échéant, on pourra vouloir parler de dimension.

Définition 18. Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E , on dit alors que $\mathcal{E}$ est de dimension n .

Tout sous-espace affines $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ étant lui-même un espace affine d'espace directeur F , il hérite automatiquement d'une dimension, à savoir celle de F .

Notation 19. On appelle droite tout sous-espace affine de dimension 1. En particulier, $x \neq y \in \mathcal{E}$ étant donnés, $\text{Aff}(\{x, y\})$ est l'unique droite contenant x et y . On la note (xy) .

On appelle plan tout sous-espace affine de dimension 2.

Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie, on appelle hyperplan tout sous-espace de dimension $\dim(\mathcal{E}) - 1$.

Proposition 20. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H} := \text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie, alors

1. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$;
2. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\dim(\mathcal{H}) = 1 + \dim(F + G)$ où F et G sont les espaces directeurs respectifs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Exemples 21.

- Deux droites, sécantes ou parallèles, dans le plan.
- Deux droites, sécantes ou disjointes (parallèles ou non) dans l'espace.
- Une droite et un plan, sécants ou parallèles, dans l'espace.

1.2 Applications affines

Définition 22. On dit que $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine si elle respecte les structures affines, c'est-à-dire s'il existe $\vec{f} : E \rightarrow F$ tels que, de manière équivalente, l'un des deux diagrammes commutes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ \downarrow f \times f & & \downarrow \vec{f} \\ \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow f \times \vec{f} & & \downarrow f \\ \mathcal{F} \times F & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array} .$$

En traduction, cela donne $\forall x, y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(x)f(y)} = \vec{f}(\overrightarrow{xy})$ ou $\forall x \in \mathcal{E}, \forall u \in E, f(x + u) = f(x) + \vec{f}(u)$.

Proposition 23. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. Il existe une unique application linéaire $\vec{f} : E \rightarrow F$, appelée linéarisée de f , satisfaisant les commutations nécessaires.

Exemples 24.

- L'identité.
- Toute application constante.
- Translations par un élément de E .
- Projection de $E \oplus F$ sur E selon F .
- Pour tout $\vec{f} \in \text{End}(E)$ et tout $x \in \mathcal{E}$, $f : \{x + u \mapsto x + \vec{f}(u)\}$. On pourra notamment penser à $\vec{f}$ homothétie, rotation ; on parlera alors d'homothétie ou de rotation de centre x .
Plus généralement, pour tout $\vec{f} : E \rightarrow F$ linéaire et tout couple $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, $f : \{x + u \mapsto y + \vec{f}(u)\}$ est affine. Toute application affine peut en fait s'écrire sous cette forme.

Définition 25. On appelle forme affine toute application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$.

Proposition 26. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine si et seulement si il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que l'application

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + u)} \end{array}$$

soit linéaire. Il s'agit alors de la linéarisée de f .

Proposition 27. La composée de deux applications affines est affine, et son linéarisé est la composée des linéarisés.

Proposition 28. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, on a $f = \xi_{f(x_0)}^{-1} \circ \vec{f} \circ \xi_{x_0}$ où $\xi_{x_0} : \mathcal{E} \rightarrow E$ (resp. $\xi_{f(x_0)} : \mathcal{F} \rightarrow F$) est l'isomorphisme induit par le choix de l'origine x_0 (resp. $f(x_0)$).

Proposition 29. Une application affine est injective (resp. surjective) si et seulement si sa linéarisée est injective (resp. surjective).

De plus, si elle est bijective, alors son application réciproque est affine, de linéarisé l'inverse du linéarisé.

Définition 30. On note $\text{MA}(\mathcal{E})$ (resp. $\text{GA}(\mathcal{E})$) l'ensemble des applications (resp. bijections) affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

L'étude des points fixes d'un élément de $\text{MA}(\mathcal{E})$ revêt un caractère essentiel. On a, en effet les propositions suivantes :

Proposition 31. Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, l'application qui envoie une application affine sur son linéarisé induit un isomorphisme entre $\text{MA}_{x_0}(\mathcal{E}) := \{f \in \text{MA}(\mathcal{E}) \mid f(x_0) = x_0\}$ et $\text{End}(E)$.

Démonstration. L'application réciproque est obtenue en conjuguant par ξ_{x_0} . □

Proposition 32. Soit $f \in \text{MA}(\mathcal{E})$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $u \in E$ et $\tilde{f} \in \text{MA}_x(\mathcal{E})$ tels que $f = t_u \circ \tilde{f}$. On a alors $\vec{g} = \vec{f}$.

Remarque 33. Pour tout $f, g \in \text{MA}(\mathcal{E})$ et tout $x \in \mathcal{E}$, on a $g \circ f = (t_{u_g + \vec{g}(u_f)} \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}))$.

Proposition 34. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. Alors

1. l'image par f d'un sous-espace affine est un sous-espace affine ;
2. l'image réciproque par f d'un sous-espace affine est soit vide, soit un sous-espace affine.

Corollaire 35. Toute application affine préserve l'alignement des points.

Remarque 36. La réciproque de cette proposition est fausse car si $\mathcal{F}$ est une droite, alors toute application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ envoie tous points sur des points alignés. Néanmoins, nous verrons plus tard que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ ont même dimension $n \geq 2$, et si f est bijective, alors la propriété de préserver l'alignement implique le caractère affine.

Proposition 37. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. L'ensemble des points fixes de f est soit vide soit un sous-espace affine.

Correction 1. Rajouter les exemples classiques d'applications affines

1.3 Barycentres & Convexité

1.3.1 Barycentres

Définition 38. Un système de points pondérés (de longueur $k \in \mathbb{N}^*$) est un k -uplet $\mathfrak{S} := ((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k)) \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^k$ de couples points-poids.

Les éléments $x_1, \dots, x_k$ sont appelés les points de $\mathfrak{S}$ et les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les coefficients de $\mathfrak{S}$.

On définit, sur l'ensemble des systèmes de points pondérés, l'opération de concaténation $*$ qui, à un k_1 -uplet et un k_2 -uplet associe un $(k_1 + k_2)$ -uplet obtenu en les juxtaposant dans l'ordre.

Exemple 39. $((x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2)) * ((x_3, \lambda_3)) = ((x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2), (x_3, \lambda_3))$.

Remarque 40. Un système de points pondérés peut faire intervenir un même point plusieurs fois. Un même point peut même intervenir plusieurs fois avec le même coefficient. Le système de points pondérés $((x, 1), (y, 2), (x, 1))$ est donc tout à fait valide, et il est différent de $((x, 1), (y, 2))$.

Proposition 41. Soit $\mathfrak{S} := ((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k))$ un système de points pondérés. On considère l'application $\phi_{\mathfrak{S}} : \mathcal{E} \rightarrow E$ définie par $\phi_{\mathfrak{S}}(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{xx_i}$.

1. Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, alors $\phi_{\mathfrak{S}}$ est constante.
2. Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, alors il existe un unique $g \in \mathcal{E}$ tel que $\phi_{\mathfrak{S}}(g) = 0$.

Définition 42. Pour tout système de points pondérés $\mathfrak{S}$ dont la somme des coefficients est non nul, on appelle barycentre de $\mathfrak{S}$ l'unique élément $\text{Bar}(\mathfrak{S}) \in \mathcal{E}$ annulant l'application $\phi_{\mathfrak{S}}$.

Si tous les coefficients valent 1, on parle d'isobarycentre.

Proposition 43. Soit $\mathfrak{S} := ((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k))$ un système de points pondérés dont la somme des coefficients est non nulle, alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a

$$\text{Bar}(\mathfrak{S}) = x + \frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{xx_i}.$$

Remarque 44. Multiplier tous les coefficients d'un système de points pondérés par un même scalaire ne modifie clairement pas le barycentre.

De même, le barycentre d'un système de points pondérés $\mathfrak{S}$ est invariant par permutation des termes de $\mathfrak{S}$.

Exemples 45.

- $\text{Bar}((x, \lambda)) = x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- Le milieu de deux points a et b défini par $\text{Bar}((a, 1), (b, 1))$.
- Le centre de gravité d'un triangle abc défini par $\text{Bar}((a, 1), (b, 1), (c, 1))$.

Proposition 46. Soit $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ deux systèmes de points pondérés. On note respectivement Λ_1 et Λ_2 les sommes des coefficients de $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Si $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_1 + \Lambda_2 \neq 0$, alors

$$\text{Bar}(\mathfrak{S}_1 * \mathfrak{S}_2) = \text{Bar}\left(\left(\text{Bar}(\mathfrak{S}_1), \Lambda_1\right), \left(\text{Bar}(\mathfrak{S}_2), \Lambda_2\right)\right).$$

Remarque 47. En vertu de cette dernière proposition, il est toujours possible de “réduire” un système de points pondérés sans en modifier le barycentre, de sorte à ne faire intervenir tout point de $\mathcal{E}$ qu'au plus une fois. Le coefficient associé à un point dans la forme réduite est alors égale à la somme de tous les coefficients attribués à ce point dans la version non réduite.

La notion de barycentre est intimement liée au caractère affine. Cela se reflète sur les propositions suivantes, caractérisant respectivement les sous-espaces affines et les applications affines.

Proposition 48. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine ssi, pour tout système $\mathfrak{S}$ de points de $\mathcal{F}$ pondérés par des coefficients dont la somme est non nulle, $\text{Bar}(\mathfrak{S}) \in \mathcal{F}$.

Corollaire 49. Le sous-espace affine engendré par un nombre fini de points est égal à l'ensemble des barycentres de systèmes de points pondérés sur ces points.

Proposition 50. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine ssi elle envoie tout barycentre de système de points pondérés sur le barycentre de l'image du système de points pondérés.

1.3.2 Convexité

Cette section ne concerne que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 51. On dit qu'un sous-ensemble $X \subset \mathcal{E}$ est convexe s'il contient tous les barycentres de points de X affectés de coefficients positifs non tous nuls.

Exemples 52.

- Pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on appelle segment $[x, y]$ l'ensemble $\{\text{Bar}((x, \lambda), (y, \mu)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu > 0\}$. Intuitivement, cela correspond aux points de la droite (xy) situés "entre" les points x et y et cela forme un ensemble convexe.
- Tout sous-espace affine est convexe.
- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles fermés.

Proposition 53. Un ensemble $X \subset \mathcal{E}$ est convexe si et seulement si, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $[x, y] \subset \mathcal{E}$.

Proposition 54. Une intersection quelconque de sous-espaces convexes est convexe.

Définition 55. Pour tout sous-ensemble $X \subset \mathcal{E}$, on appelle enveloppe convexe de X , notée $\text{Conv}(X)$ l'intersection de tous les sous-ensemble convexes de $\mathcal{E}$ contenant X . Cela correspond au plus petit sous-ensemble convexe de $\mathcal{E}$ contenant X .

Exemple 56. L'enveloppe convexe de trois points définie "l'intérieur" d'un triangle.

Proposition 57. Pour tout $X \subset \mathcal{E}$, $\text{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres de points de X affectés de coefficients positifs non tous nuls.

Corollaire 58. Pour tout $X \subset \mathcal{E}$, on a $\text{Conv}(X) \subset \text{Aff}(X)$.

Proposition 59. L'image (resp. image réciproque) d'un sous-ensemble convexe par une application affine est un sous-ensemble convexe.

1.4 Repères et bases affines

On ne considérera, dans ce qui suit, que des espaces affines de dimension finie et on notera $n_{\mathcal{E}}$, ou simplement n lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, la dimension d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1.4.1 Repères affines

Définition 60. On appelle repère de $\mathcal{E}$ tout élément $(o, e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E} \times E^n$ telle que $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de E .

Exemple 61. Le repère canonique de $\mathbb{R}^n$ est $(0, (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (0, \dots, 0, 1))$.

Proposition 62. Soit $R = (o, e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = o + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Plus précisément, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \varphi_R: (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & o + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array}$$

est une bijection affine.

Définition 63. On appelle *représentation paramétrique* d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ toute application φ_R où R est un repère pour $\mathcal{F}$.

Exemples 64.

- La droite dans $\mathbb{R}^3$ passant par (x_0, y_0, z_0) et dirigée par le vecteur (a, b, c) est paramétrisée par $(\lambda \mapsto (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c))$.
- Le plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par (x_0, y_0, z_0) et dirigé par les vecteurs non colinéaires (a, b, c) et (a', b', c') est paramétrisé par $((\lambda, \mu) \mapsto (x_0 + \lambda a + \mu a', y_0 + \lambda b + \mu b', z_0 + \lambda c + \mu c'))$.

Définition 65. Soit R un repère pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. On appelle *représentation cartésienne* de $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ tout couple $(A, B) \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(n_{\mathcal{E}} - n_{\mathcal{F}}, n_{\mathcal{E}}) \times \mathbb{K}^{n_{\mathcal{E}} - n_{\mathcal{F}}}$ matrice–vecteur tel que, pour tout $X \in \mathbb{K}^{n_{\mathcal{E}}}$,

$$\varphi_R(X) \in \mathcal{F} \iff AX + B = 0 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & A & & B \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemples 66.

- Une droite dans $\mathbb{R}^2$ est caractérisée par son équation $ax + by + c = 0$.
- Un plan dans $\mathbb{R}^3$ est caractérisé par son équation $ax + by + cz + d = 0$.
- Une droite dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrite comme intersection de deux plans, lesquels peuvent être caractérisés, respectivement, par $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. La droite est alors caractérisée par

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix} = 0 \text{ ou, de manière équivalente, par } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- L'espace $\mathcal{E}$ entier est décrit par $0.X + 0 = 0$.

Définition 67. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ munis, respectivement, de repères $R_{\mathcal{E}} = (o_{\mathcal{E}}, e_1, \dots, e_{n_{\mathcal{E}}})$ et $R_{\mathcal{F}} = (o_{\mathcal{F}}, f_1, \dots, f_{n_{\mathcal{F}}})$. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application. On appelle matrice de f dans les bases $R_{\mathcal{E}}$ et $R_{\mathcal{F}}$ la matrice

$$\text{Mat}_f(R_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{E}}) := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_{n_{\mathcal{F}}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

où A est la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans les bases $(e_1, \dots, e_{n_{\mathcal{E}}})$ et $(f_1, \dots, f_{n_{\mathcal{F}}})$, et où $(b_1, \dots, b_{n_{\mathcal{F}}}) = \varphi_{R_{\mathcal{F}}}^{-1}(f(o_{\mathcal{E}}))$.

Proposition 68. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a

$$\text{Mat}_f(R_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{E}}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_{\mathcal{E}}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_{\mathcal{F}}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\varphi_{R_{\mathcal{E}}}(x_1, \dots, x_{n_{\mathcal{E}}}) = x$ et $\varphi_{R_{\mathcal{F}}}(y_1, \dots, y_{n_{\mathcal{F}}}) = f(x)$.

Proposition 69. Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois espaces affines munis, respectivement, de repères $R_{\mathcal{E}}$, $R_{\mathcal{F}}$ et $R_{\mathcal{G}}$. Alors pour toutes applications $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, on a $\text{Mat}_{g \circ f}(R_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{E}}) = \text{Mat}_g(R_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{F}}) \cdot \text{Mat}_f(R_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{E}})$.

Définition 70. Pour $R_{\mathcal{E}}$ et $R'_{\mathcal{E}}$ deux repères de $\mathcal{E}$, on note $\text{Mat}(R'_{\mathcal{E}}, R_{\mathcal{E}}) := \text{Mat}_{\text{Id}_{\mathcal{E}}}(R'_{\mathcal{E}}, R_{\mathcal{E}})$ la matrice dite de passage qui calcule les coordonnées d'un point dans le repère $R'_{\mathcal{E}}$ à partir des coordonnées de ce point dans le repère $R_{\mathcal{E}}$.

1.4.2 Bases affines

Définition 71. On dit que $k+1 \in \mathbb{N}^*$ points $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{E}$ sont affinement libres si et seulement si $\dim(\text{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\})) = k$. On dit qu'ils engendrent $\mathcal{E}$ si et seulement si $\text{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\}) = \mathcal{E}$

On appelle base affine de $\mathcal{E}$ toute famille affinement libre de $\mathcal{E}$ engendrant $\mathcal{E}$.

Proposition 72. Toute base affine de $\mathcal{E}$ contient $n_{\mathcal{E}} + 1$ points.

Proposition 73. Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{E}$. Ils forment une base affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $(x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

Proposition 74. Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

- $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$
- $x = \text{Bar}((x_0, \lambda_0), \dots, (x_n, \lambda_n))$.

Définition 75. Avec les notations de la proposition précédente, on appelle $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ coordonnées barycentriques de x dans la base ordonnée $(x_0, \dots, x_n)$.

Contrairement aux repères affines, les bases ne mettent pas un point en avant. Les coordonnées barycentriques se révéleront, par exemple, intéressantes pour traiter les propriétés d'un triangle dans le plan.

Proposition 76. Soit $x_0, \dots, x_{n_{\mathcal{E}}} \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$.

- Une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est :
 - injective si et seulement si $f(x_0), \dots, f(x_{n_{\mathcal{E}}}) \in \mathcal{F}$ est affinement libre ;
 - surjective si et seulement si $f(x_0), \dots, f(x_{n_{\mathcal{E}}}) \in \mathcal{F}$ engendrent $\mathcal{F}$;
 - bijective si et seulement si $f(x_0), \dots, f(x_{n_{\mathcal{E}}}) \in \mathcal{F}$ est une base affine de $\mathcal{F}$; les coordonnées barycentriques de tout point $f(x) \in \mathcal{F}$ dans la base ordonnée $(f(x_0), \dots, f(x_{n_{\mathcal{E}}}))$ sont alors égales aux coordonnées barycentriques de x dans $(x_0, \dots, x_{n_{\mathcal{E}}})$.
- Si $n_{\mathcal{E}} = n_{\mathcal{F}}$, pour toute base affine $y_0, \dots, y_{n_{\mathcal{F}}} \in \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$, il existe une unique bijection affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n_{\mathcal{E}}\}$.

Proposition 77. Soit $B := (x_0, \dots, x_n)$ une base ordonnée de $\mathcal{E}$. Soit $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{E}$ et notons, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(\lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i)$ les coordonnées barycentriques de y_i dans B . Alors, pour tout $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$, les cordonnées barycentriques de $\text{Bar}((y_1, \mu_1), \dots, (y_k, \mu_k))$ dans B sont

$$\left(\sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_0^i, \dots, \sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_n^i \right).$$

Correction 2. Rajouter notation (xy) .

Correction 3. Rajouter critères pour sous-espaces affines (contient les droites).

Correction 4. Rajouter critères pour applications affines (alignements de points).

2 Géométrie euclidienne

Dans cette section, on ne considère plus que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Espaces euclidiens

2.1.1 Cas vectoriel

Définition 78. On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E toute forme bilinéaire symétrique définie

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u|v \rangle \end{aligned} \quad \text{tels que}$$

- pour tout $u \in E$, les applications $(v \mapsto \langle u|v \rangle)$ et $(v \mapsto \langle v|u \rangle)$ soient linéaires ;
- pour tout $u, v \in E$, $\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle$;
- pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $\langle u|u \rangle > 0$.

On appelle espace vectoriel euclidien, tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemples 79.

- Sur $\mathbb{R}^n$, l'application $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k =: \langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle_2$ est un produit scalaire. On l'appelle produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Sur $E := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues}\}$, l'application $((f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt)$ est un produit scalaire. Cela ne fait toutefois pas de E un espace euclidien car il est de dimension infinie.

Dans tout ce qui suit, et sauf mention explicite contraire, on considérera que E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Notation 80. Pour tout $u \in E$, on appelle norme de u la quantité $\|u\| := \sqrt{\langle u|u \rangle}$. Dans le cas du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, on note $\|u\|_2$.

Remarque 81. Réciproquement, on peut déterminer le produit scalaire à partir de la norme en utilisant l'une des formules $\langle u|v \rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2)$ ou $\langle u|v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ qui se vérifient, pour tout $u, v \in E$ par un calcul direct.

Définition 82. Soit $u, v \in E$. On dit que u est unitaire si $\|u\| = 1$. On dit que u et v sont orthogonaux si $\langle u|v \rangle = 0$.

Notation 83. Pour tout $X \subset E$, on note $X^\perp := \{u \in E \mid \forall v \in X, u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux}\}$. On dit que deux sous-ensembles $X, Y \subset E$ sont orthogonaux si $Y \subset X^\perp$ ou, de manière équivalente, si $X \subset Y^\perp$.

Proposition 84. Pour tout $X \subset E$, $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel, et pour tout $F \subset E$ sous-espace vectoriel, on a $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 85. On dit qu'une base $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée (BON) si, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ où δ est le symbole de Kronecker ; autrement dit si tous les éléments de la base sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Proposition 86. En notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans une BON donnée, on a pour tout $u, v \in E$, $\langle u|v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Corollaire 87. Tout espace euclidien de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Proposition 88 (Cauchy–Schwarz). Pour tout $u, v \in E$, on a $|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

2.1.2 Cas affine

Définition 89. On appelle distance sur un ensemble X toute application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

- pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- pour tout $x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$.

Exemples 90.

- Sur $\mathbb{R}$, l'application $((x, y) \mapsto |x - y|)$ est une distance.
- Sur tout espace vectoriel euclidien, l'application $((u, v) \mapsto \|u - v\|)$ est une distance. C'est la norme associée au produit scalaire.

Définition 91. On appelle espace affine euclidien tout espace affine dont l'espace directeur est un espace vectoriel euclidien.

Proposition 92. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien, alors l'application $((x, y) \mapsto \|\overrightarrow{xy}\|)$ est une distance sur $\mathcal{E}$.

Exemple 93. La structure affine canonique associée à un espace vectoriel euclidien E fait de E un espace affine euclidien dont la distance correspond à la norme associée au produit scalaire.

Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire explicite, on considérera que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension n dont l'espace directeur E est muni du produit scalaire $((u, v) \mapsto \langle u | v \rangle)$. On notera alors $d(x, y)$ ou $\overline{xy}$ la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

Définition 94. On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont orthogonaux si F et G sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.

Définition 95. On dit qu'un triangle abc de $\mathcal{E}$ est rectangle en a si et seulement si $(ab) \perp (ac)$.

Remarque 96. La notion de perpendicularité existe en toute généralité, mais elle est, en générale, distincte de l'orthogonalité.

Définition 97. On dit qu'un repère $(o, e_1, \dots, e_n)$ est orthonormé si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E .

Proposition 98. En notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $x \in \mathcal{E}$ dans un repère orthonormé donnée, on a pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $d(x, y) = \|(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)\|_2$.

2.2 Isométries

2.2.1 Cas vectoriel

Définition 99. On dit que $f \in \text{End}(E)$ est une isométrie si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\langle \cdot | \cdot \rangle} & \mathbb{R} \\ f \times f \downarrow & \nearrow \langle \cdot | \cdot \rangle & \\ E \times E & & \end{array} ;$$

autrement dit, si f préserve le produit scalaire dans le sens où, pour tout $u, v \in E$, $\langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle$.

Proposition 100.

- Une isométrie est bijective.
- Un morphisme $f \in \text{End}(E)$ est une isométrie si et seulement si le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\|\cdot\|} & \mathbb{R}_+ \\ f \downarrow & \nearrow \|\cdot\| & \\ E & & \end{array} .$$

- Si $F \subset E$ est stable par une isométrie f , alors $F^\perp$ l'est aussi.

Définition 101. On appelle $O(E)$ le groupe des isométries de E . Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, on note $O(n)$.

Proposition 102. Pour tout espace vectoriel euclidien, on a $O(E) \cong O(\dim(E))$.

Pour un groupe, il est toujours intéressant de connaître un système de générateurs

Exemple 103. On appelle symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel $F \subset E$ l'application $s_F : E \rightarrow E$ définie par $s_F := \text{Id}_F \oplus (-\text{Id}_{F^\perp})$. Une réflexion est une symétrie par rapport à un hyperplan. ce sont des isométries.

Proposition 104. Toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.

Proposition 105. Soit $\mathcal{B}$ une BON. L'application $f \in \text{End}(E)$ est une isométrie si et seulement si elle envoie $\mathcal{B}$ sur une BON. Réciproquement, pour toute BON $\mathcal{B}'$, il existe une unique isométrie envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$.

Corollaire 106. Soit $\mathcal{B}$ une BON. Un morphisme $f \in \text{End}(E)$ est une isométrie si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale, c'est-à-dire si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^t(f)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Id}$. On a alors notamment $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{-1}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^t(f)$.

Proposition 107. On a $O(1) = \{\pm \text{Id}\}$ et, pour tout élément $f \in O(2)$, il existe une BON $\mathcal{B}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou (exclusif) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un unique $\theta \in [0, \pi]$.

Définition 108. On appelle rotation vectorielle toute isométrie de $O(2)$ possédant une matrice de la forme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans un BON.

Proposition 109. Pour tout élément de $O(n)$, il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ 0 & & & & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix}$$

pour certains $\theta_1, \dots, \theta_m \in [0, 2\pi[$.

2.2.2 Cas affine

Définition 110. On dit que $f \in \text{MA}(\mathcal{E})$ est une isométrie si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \xrightarrow{d} & \mathbb{R}_+ \\ f \times f \downarrow & \nearrow d & \\ \mathcal{E} \times \mathcal{E} & & \end{array} ;$$

autrement dit, si f préserve la distance dans le sens où, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Proposition 111. • Pour tout $f \in \text{MA}(\mathcal{E})$, f est une isométrie si et seulement si $\vec{f} \in \text{End}(E)$ est une isométrie.

- Toute isométrie affine est bijective.

Définition 112. On appelle $\text{Isom}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Exemples 113.

1. Les translations.
2. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, on définit $s_{\mathcal{F}}$ la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{F}$ par, en fixant $o \in \mathcal{F}$, $s_{\mathcal{F}}(o + u) = o + s_{\mathcal{F}}(u)$ pour tout $u \in E$. Si $\mathcal{F}$ est un hyperplan, on parle alors de réflexion. Ce sont des isométries.

Proposition 114. Toute isométrie affine s'écrit comme produit d'au plus $n + 1$ réflexions.

Théorème 115. Pour tout $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, il existe un unique couple $(u, \varphi) \in E \times \text{Isom}(\mathcal{E})$ tel que

- φ possède au moins un point fixe ;
- t_u et φ commutent ;
- $f = \varphi \circ t_u$.

On a alors $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

La démonstration de ce théorème va s'appuyer sur deux lemmes :

Lemme 116. Soit $\vec{f} \in \text{O}(E)$, $\mathfrak{Im}(\vec{f} - \text{Id})^\perp = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

Lemme 117. Soit $f \in \text{MA}(\mathcal{E})$ telle que $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \oplus \mathfrak{Im}(\vec{f} - \text{Id}) = E$, alors la conclusion du théorème s'applique avec $\varphi \in \text{MA}(\mathcal{E})$.

Proposition 118. Si $n = 1$, on a $\text{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{réflexion par rapport à un point}\}$.

Définition 119. Si $n = 2$, on appelle

- rotation autour de $a \in \mathcal{E}$ toute isométrie affine f telle que $f(a + u) = a + \vec{f}(u)$ avec $\vec{f}$ une rotation vectorielle distincte de l'identité ;
- symétrie glissée toute réflexion composée avec une translation parallèle à l'axe de la réflexion.

Proposition 120. Si $n = 2$, on a $\text{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{rotation}\} \cup \{\text{symétrie glissée}\}$.

Définition 121. Si $n = 3$, on appelle

- rotation autour d'axe $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ toute isométrie affine f fixant $\mathcal{D}$ et telle que $\vec{f}|_{\mathcal{D}^\perp}$ est une rotation vectorielle distincte de l'identité ;
- vissage toute composé d'une rotation avec une translation parallèle à l'axe de la rotation ;
- symétrie glissée toute réflexion composée avec une translation parallèle à l'axe de la réflexion ;
- anti-rotation toute composé d'une rotation avec une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Proposition 122. Si $n = 3$, on a $\text{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{vissage}\} \cup \{\text{symétrie glissée}\} \cup \{\text{anti-rotations}\}$.

2.3 Orientation

Proposition 123. *Le groupe $GL(E)$ des automorphismes linéaires de E agit fidèlement et transitivement sur les bases de E . Autrement, pour tout couple $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de bases de E , il existe un unique $f \in GL(E)$ tel que $f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.*

Définition 124. On définit la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E par $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ si et seulement si il existe $f \in GL(E)$ tel que $f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$ et $\det(f) > 0$.

Proposition 125. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence possédant exactement deux classes d'équivalences.*

Définition 126. Une orientation sur E , c'est le choix d'une des deux classes d'équivalence de la relation $\sim$. On appelle alors *bases directes* les éléments de cette classe et *bases indirectes* les éléments de l'autre classe.

Notation 127. Une orientation sur E étant choisie, on notera BOND pour base orthonormée directe.

Définition 128. Une orientation sur $\mathcal{E}$, c'est le choix d'une orientation pour E . On dit qu'un repère est directe si la base de E sous-jacente est directe.

Définition 129. On appelle groupe spécial orthogonal de E le groupe $SO(E) := \text{Ker}(\det|_{O(E)})$.

Définition 130. On dit que $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ est positive si $\vec{f} \in SO(E)$. On dit aussi que f est un déplacement. On note $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ le groupe des déplacements.

Remarque 131. Une isométrie est un déplacement indépendamment de tout choix d'orientation.

Proposition 132.

- Si $n = 1$, $\text{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{translation}\}$;
- si $n = 2$, $\text{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{translation}\} \cup \{\text{rotation}\}$;
- si $n = 3$, $\text{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{translation}\} \cup \{\text{vissage}\}$.

3 Géométrie euclidienne dans le plan

Dans toute cette section, on considérera que $\mathcal{E}$ est un plan affine d'espace directeur E .

On appellera rotation vectorielle tout élément de $SO(E)$.

3.1 Angles

3.1.1 Angles orientés

Dans cette section, E n'est pas nécessairement orienté.

Lemme 133.

- Soit $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires. Il existe une unique rotation vectorielle ρ_{uv} telle que $\rho_{uv}(u) = v$.
- Soit $(u, v), (u', v') \in E^2$ deux couples de vecteurs unitaires. Il existe une rotation vectorielle ρ telle $\rho(u, v) = (u', v')$ si et seulement si $\rho_{uv} = \rho_{u'v'}$.

Définition 134. On définit la relation ∇ sur $\{(u, v) \in E^2 \mid \|u\| = \|v\| = 1\}$ par $(u, v) \nabla (u', v')$ si et seulement si il existe une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(u, v) = (u', v')$.

Proposition 135. *La relation ∇ est une relation d'équivalence.*

Définition 136.

- On note $\mathcal{A}(E) := \{(u, v) \in E^2 \mid \|u\| = \|v\| = 1\} / \nabla$ et on appelle *angles orientés dans E* ses éléments.
- Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on appelle *angle orienté entre u et v* , noté $\widehat{(u, v)}$, la classe d'équivalence de $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$ par ∇ .

Proposition 137. *L'application*

$$\begin{aligned} \{(u, v) \in E^2 \mid \|u\| = \|v\| = 1\} &\longrightarrow \text{SO}(E) \\ (u, v) &\longmapsto \rho_{uv} \end{aligned}$$

induit une bijection de $\mathcal{A}(E)$ dans $\text{SO}(E)$ qui induit une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}(E)$.

Proposition 138.

- Pour tout $u, v, w \in E \setminus \{0\}$, on a $\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)}$.
- Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$ et $f \in \text{O}(E)$, on a $\widehat{(f(u), f(v))} = \widehat{(u, v)}$ si $f \in \text{SO}(E)$ et $\widehat{(f(u), f(v))} = \widehat{(v, u)}$ sinon.

Définition 139. On définit la relation $\square$ sur $\mathcal{A}(E)$ par $\widehat{(u, v)} \square \widehat{(u', v')}$ si et seulement si $\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')}$ ou $\widehat{(u, v)} = \widehat{(-u', v')}$.

Proposition 140. *La relation $\square$ est une relation d'équivalence.*

Définition 141.

- On note $\mathcal{A}_D(E) := \mathcal{A}(E) / \square$ et on appelle *angles orientés de droites dans E* ses éléments.
- On appelle *angle orienté entre deux droites $D_1, D_2 \subset E$* , noté $\widehat{(D_1, D_2)}$, la classe d'équivalence de $\widehat{(u_1, u_2)}$, où u_1 et u_2 sont respectivement des vecteurs directeurs de D_1 et D_2 , par $\square$.
- On appelle *angle orienté entre deux droites affines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$* , noté $\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}$, l'angle orienté entre leurs espaces directeurs.

Proposition 142. *L'isomorphisme $\mathcal{A}(E) \cong \text{SO}(E)$ induit une bijection de $\mathcal{A}_D(E)$ dans $\text{SO}(E) / \pm \text{Id}$ qui induit une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}_D(E)$.*

3.1.2 Mesures d'angle

Dans cette section, on fixe une orientation pour E .

Proposition 143. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2, 2) \\ \theta &\longmapsto R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupe.

Corollaire 144. *Pour toute rotation vectorielle ρ , il existe un unique $\theta \in \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = R_\theta$ pour toute BOND $\mathcal{B}$.*

Corollaire 145. *L'application*

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{SO}(E) \cong \mathcal{A}(E) \\ \theta & \longmapsto & \rho_\theta \end{array},$$

avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho_\theta)$ pour $\mathcal{B}$ une BOND, est un isomorphisme de groupe.

Définition 146.

- L'unique antécédent θ_ρ par ψ d'une rotation vectorielle ρ est appelée sa mesure d'angle.
- Pour toute rotation affine r , on définit la mesure d'angle de r comme étant la mesure d'angle de $\vec{r}$. Par convention, on définit de plus la mesure d'angle de l'identité comme étant 0.
- L'unique antécédent θ_{uv} par ψ d'un angle $\widehat{(u, v)}$ est appelée sa mesure.

Remarque 147. Le fait d'avoir choisi une orientation pour $\mathcal{E}$ permet d'associer à toute rotation un élément dans $] -\pi, \pi]$ et non plus dans $]0, \pi]$. En changeant l'orientation, on change le signe de toutes les mesures d'angle.

Définition 148. Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on définit θ_{uv} la mesure de l'angle $\widehat{(u, v)}$ comme la mesure d'angle de la rotation associée.

Proposition 149.

- Pour tout $u, v, w \in E \setminus \{0\}$, on a $\theta_{uv} + \theta_{vw} = \theta_{uw}$.
- Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on a $\theta_{(-u)v} = \theta_{uv} + \pi$.
- Pour tout $u, v \in \setminus \{0\}$ et $f \in O(E)$, on a $\theta_{f(u)f(v)} = \theta_{uv}$ si $f \in \text{SO}(E)$ $\theta_{f(u)f(v)} = -\theta_{uv}$ sinon.

Proposition 150. Pour tout $u, v \in \setminus \{0\}$, $\langle u|v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta_{uv})$.

Proposition 151. L'isomorphisme ψ induit un isomorphisme $\tilde{\psi}: \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}_D(E)$.

Définition 152. L'unique antécédent par $\tilde{\psi}$ d'un angle de droites est appelée sa mesure.

3.1.3 Angles géométriques

Dans cette section, E n'est plus nécessairement orienté.

Définition 153.

- On appelle angle (resp. angle de droite) géométrique l'image quotient d'un angle orienté (resp. angle de droites) par la relation d'équivalence définie par $\widehat{(u, v)} \sim \widehat{(u', v')}$ si et seulement si $\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')}$ ou $\widehat{(u, v)} = \widehat{(v', u')}$.
- On appelle angle (resp. angle de droite) géométrique entre deux vecteurs non nuls (resp. deux droites vectorielles ou affines) l'image de leur angle (resp. angle de droite) orienté dans l'ensemble des angles (resp. angles de droite) géométriques.

Remarques 154.

- On aurait pu définir les angles géométriques en remplaçant $\text{SO}(E)$ par $O(E)$ dans la construction des angles orientés.
- Les angles géométriques perdent la structure de groupes des angles orientés.

Définition 155.

- On définit la mesure d'un angle géométrique décrit par deux vecteurs $u, v \in E \setminus \{0\}$ par

$$\theta_{uv}^g := \arccos \left(\frac{\langle u|v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \right) \in [0, \pi].$$

- On définit la mesure d'un angle de droites géométrique décrit par deux vecteurs $u, v \in E \setminus \{0\}$ par

$$\arccos \left(\frac{|\langle u|v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \right) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Proposition 156. *Si E est orienté, alors, pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, $\theta_{uv}^g = |\theta_{uv}|$.*

3.1.4 Résumé

Les angles n'ont pas besoin du choix d'une orientation pour être défini, mais leurs mesures si.

	angles	angles de droites
orientés	(u, v)	$(u, v) = (\pm u, \pm v)$
	mesure $\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$	mesure $\in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$
géométriques	$\widehat{(u, v)} = \widehat{(v, u)}$	$\widehat{(u, v)} = \widehat{(\pm v, \pm u)}$
	mesure $\in [0, \pi]$	mesure $\in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

3.2 Coniques

3.2.1 Distance entre point et sous-espace affine

Proposition 157. *A une droite donnée, il passe une unique droite orthogonale passant par un point donnée.*

Définition 158. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite. On appelle projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ l'application $p_{\mathcal{D}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ qui à tout $x \in \mathcal{E}$ associe l'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'unique droite passant par x qui lui est orthogonale.

Proposition 159. *Pour toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, l'application $p_{\mathcal{D}}$ est affine.*

Définition 160. Pour toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et tout point $x_0 \in \mathcal{E}$, on définit $d(x_0, \mathcal{D}) := \min_{x \in \mathcal{D}} d(x_0, x)$.

Proposition 161. *Pour toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et tout point $x_0 \in \mathcal{E}$, si $x'_0 \in \mathcal{D}$, alors $(d(x_0, \mathcal{D}) = d(x_0, x'_0)) \Leftrightarrow x'_0 = p_{\mathcal{D}}(x_0)$.*

Proposition 162. *Pour toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et tout point $x_0 \in \mathcal{E}$, on a $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si $d(x_0, \mathcal{D}) = 0$.*

Proposition 163. *Pour toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et toute isométrie $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ on a $d(f(x_0), f(\mathcal{D})) = d(x_0, \mathcal{D})$.*

3.2.2 Généralités sur les coniques

Définition 164. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite, $F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$ un point et $e \in \mathbb{R}_+$. On appelle conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble

$$\Gamma := \left\{ x \in \mathcal{E} \mid d(x, F) = ed(x, \mathcal{D}) \right\}.$$

Si $e < 1$, on parle d'ellipse ; si $e = 1$, on parle de parabole ; si $e > 1$, on parle d'hyperbole.

Définition 165. Avec les notations de la définition précédente, on appelle axe focal de Γ la droite Δ orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par F ; et paramètre de Γ le réel $p := ed(F, \mathcal{D})$.

Proposition 166. *A isométrie près, les coniques sont classifiées par leurs excentricités et leurs paramètres.*

Dans tout ce qui suit, Γ est une conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F , d'axe focal Δ et de paramètre p . On notera aussi $K := p_{\mathcal{D}}(F)$.

Proposition 167. *L'axe focal Δ est un axe de symétrie pour Γ .*

Proposition 168. *Il existe un repère orthonormé centré en F tel que*

$$(x, y) \in \Gamma \iff (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx = p^2.$$

Proposition 169. *Pour toute parabole Γ , il existe un repère orthonormé tel que $(x, y) \in \Gamma \iff x = \frac{y^2}{2p}$.*

Corollaire 170. *Pour tout couple de parabole, il existe une bijection affine envoyant l'une sur l'autre.*

Proposition 171. *Pour toute ellipse Γ , il existe un repère orthonormé et des réels $a \geq b > 0$ tel que $(x, y) \in \Gamma \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.*

Définition 172. On appelle, respectivement, a et b le grand et le petit axe de Γ .

Corollaire 173. *Pour tout couple d'ellipse, il existe une bijection affine envoyant l'une sur l'autre.*

Proposition 174. *Pour toute hyperbole Γ , il existe un repère orthonormé et des réels $a \geq b > 0$ tel que $(x, y) \in \Gamma \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.*

Corollaire 175. *Pour tout couple d'hyperbole, il existe une bijection affine envoyant l'une sur l'autre.*

Corollaire 176. *A $\text{GA}(\mathcal{E})$ près, il n'existe que trois coniques.*

Définition 177. Dans un repère (O, u, v) , on dit qu'un point $x \in \mathcal{E} \setminus a$ a pour coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi$ si $\vec{ox} = \rho \cos \theta u + \rho \sin(\theta) v$.

Proposition 178. *En coordonnées polaires $(\rho_1, \theta_1) = (\rho_2, \theta_2)$ si et seulement si on a l'un des trois cas suivantes :*

- $\rho_1 = \rho_2 = 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2$;
- $\rho_1 = -\rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + \pi$.

Proposition 179. *Il existe un repère orthonormé centré en F tel que*

$$(\rho, \theta) \in \Gamma \iff \rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}.$$

3.2.3 Coniques bifocales

On suppose ici que $e \neq 0, 1$.

Proposition 180. *Toute ellipse et toute hyperbole possède un second axe de symétrie Δ' parallèle à $\mathcal{D}$ bien que distincte et ne contenant pas F .*

Notation 181. On note, respectivement, $\mathcal{D}'$ et F' l'image des $\mathcal{D}$ et de F par ce second axe de symétrie.

Proposition 182. *La conique associée à $\mathcal{D}'$, F' et e est égale à Γ .*

Proposition 183. *Si $e < 1$, alors $\Gamma \subset \text{Conv}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}')$. Si $e > 1$, $\Gamma \cap \text{Conv}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = \emptyset$.*

Proposition 184.

- Si $e < 1$, alors $\Gamma = \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, F) + d(x, F') = 2a\}$.
- Si $e > 1$, alors $\Gamma = \{x \in \mathcal{E} \mid |d(x, F) - d(x, F')| = 2a\}$.