Université Aix-Marseille	2015–2016

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel
12 novembre 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Notations
Dans tout le sujet, $\mathcal{E}$ est un espace affine réel d'espace directeur E.

Pour tous points $a, b \in \mathcal{E}$, on note $[a, b] := \mathrm{Conv}(\{a, b\})$ le segment entre a et b et, si $a \neq b$, $(a, b) = \mathrm{Aff}(\{a, b\})$ la droite passant par a et b.

On dit que quatre points $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ forment un trapèze si les points sont non alignés et deux à deux distincts, et si $(ab) /\!/ (cd)$. On dit qu'ils forment un parallélogramme si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

On appelle homothétie de centre $a \in \mathcal{E}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ l'application $h_{a,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $h_{a,\lambda}(a+u) = a+\lambda u$ pour tout $u \in E$.

Pour tous points alignés distincts a, b, c, on note $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$ l'unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{ab}$.

Exercice 1. (4 points)

1. Donner la définition d'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.
2. Donner la définition d'un sous-espace convexe de $\mathcal{E}$.
3. Montrer que si $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ forment un trapèze vérifiant $(ad) /\!/ (bc)$, alors $abcd$ est un parallélogramme.
4. Montrer qu'une homothétie envoie toute droite sur une droite parallèle.

Exercice 2. (5 points) Soit $abcd$ un trapèze tel que ni $abcd$, ni $abdc$ soit un parallélogramme.

1. Montrer que les droites (ad) et (bc) d'une part, et (ac) et (bd) d'autre part, se coupent en un unique point.

On note i le point d'intersection de (ad) et (bc), j le point d'intersection de (ac) et (bd), k le milieu des points a et b, l le milieu des points c et d.

2. (a) Montrer qu'il existe une unique homothétie h de centre i envoyant d sur a.
   (b) Montrer que $h(c) = b$.
   (c) En déduire que les points i, k et l sont alignés.
3. (a) Montrer qu'il existe une unique homothétie h' de centre j envoyant a sur c.
   (b) Montrer que les points i, j, k et l sont alignés.
4. (a) Montrer que l'application affine $h' \circ h$ échange les points c et d et fixe l.
   (b) En déduire que $\frac{\overline{ik}}{\overline{il}} = -\frac{\overline{jk}}{\overline{jl}}$.

TSVP $\Longrightarrow$

Exercice 3. (5 points) Dans cet exercice, on considère que $\mathcal{E}$ est un plan affine.

1. Soit a, b, c une base affine de $\mathcal{E}$. Pour tout point $x \in \mathcal{E}$, on note (x_1, x_2, x_3) ses coordonnées barycentriques dans cette base. Montrer que trois points $x, y, z \in \mathcal{E}$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ trois points deux à deux distincts et $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine coupant chacune des droites (ab), (bc) et (ca) en un point. On note, respectivement, c', a' et b' les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec (ab), (bc) et (ca) ; puis $a'' = a + \overrightarrow{ab'} + \overrightarrow{ac'}$, $b'' = b + \overrightarrow{bc'} + \overrightarrow{ba'}$ et $c'' = c + \overrightarrow{ca'} + \overrightarrow{cb'}$.

   Montrer que les points a'', b'' et c'' sont alignés.

Exercice 4. (2 points)

1. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ trois points. On note i le milieu des points a et b, et j le milieu des points a et c. Montrer que $\overrightarrow{bc} = 2\overrightarrow{ij}$.

2. Soit $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ quatre points. On note i le milieu des points a et c, j le milieu des points a et d, k le milieu des points b et d et l le milieu des points b et c. Montrer que $ijkl$ est un parallélogramme.

Exercice 5. (6 points) Pour tous sous-ensembles (non nécessairement affine) $A, B \subset \mathcal{E}$, on note

$$\mathcal{M}(A, B) := \{\text{milieu de } a \text{ et } b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que, pour tous $A, B \subset \mathcal{E}$ sous-espaces affines, $\mathcal{M}(A, B)$ est un sous-espace affine.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{E}$ et tout $B \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{M}(\{a\}, B) = h_{a,\frac{1}{2}}(B)$.

3. Montrer que, pour tous $A, B \subset \mathcal{E}$ convexes, on a $\mathcal{M}(A, B)$ convexe.

4. Pour tous $a, b, c, d \in \mathcal{E}$, déterminer la nature géométrique de $\mathcal{M}([ab], [cd])$.