Université Aix-Marseille 2015–2016

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel
corrigé

Exercice 1.

1. On dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est affine si il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(E)$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \times E \arrow[r] \arrow[d, "f\times\overrightarrow{f}"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E} \times E \arrow[r] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $u \in E$, on ait $f(x+u) = f(x) + \overrightarrow{f}(u)$.

2. On dit que $A \subset \mathcal{E}$ est convexe s'il contient tous les barycentres de points de A affectés de coefficients positifs, c'est-à-dire si, pour tous $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{E}$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, le barycentre $\mathrm{Bar}((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k))$ est dans A.

3. Supposons que $abcd$ soit un trapèze vérifiant $(ad) /\!/ (bc)$. On a alors $(ab) /\!/ (cd)$ donc $\overrightarrow{cd} = \lambda\overrightarrow{ab}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(ad) /\!/ (bc)$ donc $\overrightarrow{bc} = \mu\overrightarrow{ad}$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ab} + \mu\overrightarrow{ad}$ d'une part et $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{ad} - \lambda\overrightarrow{ab}$ d'autre part. On en déduit que $(1+\lambda)\overrightarrow{ac} = (1-\mu)\overrightarrow{ad}$. Or les vecteurs $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ad}$ ne peuvent pas être colinéaires car alors a, b et d seraient alignés et, comme $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \mu\overrightarrow{ad}$, les points a, b, c et d seraient alignés, ce qui contredirait que $abcd$ soit un trapèze. On a donc $1 + \lambda = 0$ et donc $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$. Le quadrilatère $abcd$ est donc un parallélogramme.

4. Soit $h_{a,\lambda}$ une homothétie. En posant $\overrightarrow{h}_{a,\lambda} = \lambda\mathrm{Id} \in \mathrm{End}(E)$, on a bien, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et $u \in E$,

$$h_{a,\lambda}(x+u) = h_{a,\lambda}(a + \overrightarrow{ax} + u) = a + \lambda(\overrightarrow{ax} + u) = (a + \lambda\overrightarrow{ax}) + \lambda u = h_{a,\lambda}(x) + \overrightarrow{h}_{a,\lambda}(u).$$

L'application $h_{a,\lambda}$ est donc bien affine. De plus, elle envoie toute droite $\mathcal{D}$, dirigée par un vecteur $u \in E \setminus \{0\}$, sur une droite $\mathcal{D}'$ dirigée par $\overrightarrow{h}_{a,\lambda}(u) = \lambda u$. Les espaces directeurs des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc égaux et les droites sont parallèles.

Exercice 2.

1. Commençons par montrer que tout trapèze $abcd$ est inclu dans un plan. En effet, on a $(ab) /\!/ (cd)$ donc $\overrightarrow{dc}$ est un multiple de $\overrightarrow{ab}$, donc c est dans $\mathcal{P} := \mathrm{Aff}(\{a, b, d\})$. De plus, $\mathcal{P}$ est bien un plan car sinon, les quatre points seraient alignés.
Le quadrilatère $abcd$ est un trapèze mais pas un parallélogramme donc, d'après la question 3. de l'exercice 1, les droites (ad) et (bc) ne sont pas parallèles. Elles sont, par ailleurs dans le plan $\mathcal{P}$. Or deux droites non parallèles dans un plan sont sécantes en un point. En effet, leurs vecteurs directeurs étant non colinéaires, ils engendrent un espace de dimension deux ; ils engendrent donc tout l'espace directeur de $\mathcal{P}$. Par ailleurs, deux sous-espaces affines d'un troisième dont les espaces directeurs engendrent l'espace directeur du troisième ont une intersection non vide. Enfin, (ad) et (bc) ne peuvent pas s'intersecter en une droite car on aurait alors $(ad) = (bc)$, et elles seraient parallèles. Les droites (ad) et (bc) se coupent donc en un unique point.
Si $abcd$ est un trapèze, alors $abdc$ l'est aussi car $(dc) = (cd)$, et par le même raisonnement, on obtient que (ac) et (bd) se coupent en un unique point.

2. (a) Par construction, les points i, a et d sont alignés, il existe donc un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{ia} = \lambda \overrightarrow{id}$. De plus, $\lambda \neq 0$, car sinon on aurait $i = a$ et donc $a \in (bc)$; on aurait alors $\overrightarrow{ab}$ colinéaires à $\overrightarrow{bc}$ et à $\overrightarrow{cd}$, et donc $d \in (bc)$. Au final, les points a, b, c et d seraient alignés, ce qui contredirait le fait qu'ils forment un trapèze. L'homothétie $h := h_{i,\lambda}$ est donc bien définie et c'est la seule homothétie de centre i envoyant d sur a.

   (b) D'après la question 4. de l'exercice 1, h envoie (cd) sur la parallèle à (cd) passant par a, c'est-à-dire sur (ab). Par ailleurs, elle laisse clairement invariant la droite $(ib) = (bc)$. L'intersection de (cd) et (bc), à savoir c est donc envoyé par h sur l'intersection de (ab) et (bc), à savoir b.

   (c) Une application affine préserve les barycentre, le milieu de c et d, à savoir l est donc envoyé sur le milieu de b et a, à savoir k. Il y a donc une homothétie de centre i envoyant l sur k, les points i, k et l sont donc alignés.

3. (a) En permutant le rôle de c et d, l'argument de la question 2.(a) montre qu'il existe une unique homothétie envoyant c sur a. En considérant son inverse, on en déduit qu'il existe une unique homothétie h' de centre j et de rapport $\mu \in \mathbb{R}^*$ envoyant a sur c.

   (b) Par le même raisonnement qu'aux questions 2.(b) et 2.(c), on montre que $h'(b) = d$ puis que $h'(l) = k$. Les points j, k et l sont donc alignés. Or $k \neq l$, car sinon on aurait $(ab) = (cd)$ et les points a, b, c et d seraient alignés. On en déduit les points i, j, k et l sont tous sur la droite (kl), et donc tous alignés.

4. (a) On a $(h' \circ h)(d) = h'(a) = c$, $(h' \circ h)(c) = h'(b) = d$ et $(h' \circ h)(l) = h'(k) = l$.

   (b) D'une part, on a $\overrightarrow{h' \circ h}(\overrightarrow{lc}) = \overrightarrow{ld} = -\overrightarrow{lc}$ et, d'autre part, $\overrightarrow{h' \circ h}(\overrightarrow{lc})(\overrightarrow{h'} \circ \overrightarrow{h})(\overrightarrow{lc}) = \overrightarrow{h'}(\lambda\overrightarrow{lc}) = \mu\lambda\overrightarrow{lc}$. Or $\overrightarrow{lc} \neq 0$ car sinon on aurait $c = d$, ce qui contredirait le fait que $abcd$ est un trapèze ; on en déduit donc que $\mu\lambda = -1$ et donc que $\lambda = -\mu^{-1}$. Or h envoie l sur k, donc $\lambda = \frac{\overline{ik}}{\overline{il}}$ et h' envoie k sur l donc $\mu^{-1} = \frac{\overline{jk}}{\overline{jl}}$.

Exercice 3.

1. Supposons d'abord que deux des points sont confondus. Les trois points sont alors toujours alignés, et la matrice possède deux colonnes identiques, son déterminant est donc toujours nul.
   Supposons maintenant que les trois points sont deux à deux distincts. On a alors

$$
\begin{aligned}
x, y, z \text{ alignés} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \mathrm{Bar}((x,\lambda),(z,1-\lambda)) \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&\implies \text{les vecteurs } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{ sont liés.}
\end{aligned}
$$

   Mais réciproquement, supposons qu'ils sont liés. La somme de coefficients barycentriques faisant 1, deux vecteurs ne sont colinéaires que s'ils sont égaux. Les trois points étant distincts, il existe donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Mais alors $\alpha = \alpha(y_1 + y_2 + y_3) = \beta(x_1 + x_2 + x_3) + \gamma(z_1 + z_2 + z_3) = \beta + \gamma$ et donc $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{\alpha} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. On obtient donc

$$
x, y, z \text{ alignés} \iff \text{les vecteurs } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{ sont liés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.
$$

2. Si les points a, b et c sont alignés, alors toute la construction reste confinée dans la droite qui les contient et les points a'', b'' et c'' sont clairement alignés.
   Supposons maintenant qu'ils ne sont pas alignés et qu'ils forment donc une base affine. Ecrivons les coordonnées barycentriques de chacun des points dans cette base. Puisque a' est sur (bc), on a $a' = (0, \alpha, 1-\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ et, de même, $b' = (1-\beta, 0, \beta)$ et $c' = (\gamma, 1-\gamma, 0)$ pour certains $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a alors $\overrightarrow{ab'} = (1-\beta)\overrightarrow{aa} + \beta\overrightarrow{ac} = \beta\overrightarrow{ac}$ et $\overrightarrow{ac'} = (1-\gamma)\overrightarrow{ab}$ donc $a'''' = a + \overrightarrow{ab'} + \overrightarrow{ac'} = a + \beta\overrightarrow{ac} + (1-\gamma)\overrightarrow{ab} = a + (\gamma-\beta)\overrightarrow{aa} + (1-\gamma)\overrightarrow{ab} + \beta\overrightarrow{ac}$ On en déduit $a'' = (\gamma-\beta, 1-\gamma, \beta)$. Par permutation circulaire, on obtient $b'' = (\gamma, \alpha-\gamma, 1-\alpha)$ et $c'' = (1-\beta, \alpha, \beta-\alpha)$. D'après la question précédente, les points a'', b'' et c'' ne sont donc alignés que si et seulement si (en sommant toutes les colonnes dans la dernière, en soustrayant la première ligne aux autres puis en développant par la dernière colonne)

$$\begin{vmatrix} \gamma-\beta & 1-\gamma & \beta \\ \gamma & \alpha-\gamma & 1-\alpha \\ 1-\beta & \alpha & \beta-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma-\beta & 1-\gamma & 1 \\ \gamma & \alpha-\gamma & 1 \\ 1-\beta & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma-\beta & 1-\gamma & 1 \\ \beta & \alpha-1 & 0 \\ 1-\gamma & \alpha+\gamma-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \alpha-1 \\ 1-\gamma & \alpha+\gamma-1 \end{vmatrix}$$

$$= \beta(\alpha+\gamma-1) - (\alpha-1)(1-\gamma) = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0.$$

   Or, par ailleurs, les points a', b' et c' sont alignés car tous sur $\mathcal{D}$. On a donc (en développant par la première ligne)

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 0 \end{vmatrix} = (1-\alpha)\begin{vmatrix} 1-\beta & 0 \\ \gamma & 1-\gamma \end{vmatrix} - \alpha\begin{vmatrix} 1-\beta & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta\gamma = 0.$$

   Ce qui, en développant, donne bien la condition pour que les points a'', b'' et c'' soient alignés.

Exercice 4.

1. Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ab} = 2\overrightarrow{aj} - 2\overrightarrow{ai} = 2\overrightarrow{ij}$.

2. En considérant le triangle acd, on obtient d'après la question précédente, $\overrightarrow{ij} = 2\overrightarrow{cd}$, et en considérant le triangle bcd, $\overrightarrow{lk} = 2\overrightarrow{cd}$. On en déduit que $\overrightarrow{ij} = \overrightarrow{lk}$ et donc que le quadrilatère $ijkl$ est un parallélogramme.

Exercice 5.

1. Il suffit de montrer que $\mathcal{M}(A, B)$ contient tous les barycentres de points de $\mathcal{M}(A, B)$. Or par associativité des barycentres, on a, pour tout $a_1, \ldots, a_k \in A$, $b_1, \ldots, b_k \in B$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bar}\Big(\big(\mathrm{Bar}((a_1,1),(b_1,1)),\lambda_1\big),\cdots,\big(\mathrm{Bar}((a_k,1),(b_k,1)),\lambda_k\big)\Big) &= \mathrm{Bar}\Big(\big(a_1,\frac{\lambda_1}{2}\big),\big(b_1,\frac{\lambda_1}{2}\big),\ldots,\big(a_k,\frac{\lambda_k}{2}\big),\big(b_k,\frac{\lambda_k}{2}\big)\Big) \\
&= \mathrm{Bar}\Big(\big(a_1,\frac{\lambda_1}{2}\big),\ldots,\big(a_k,\frac{\lambda_k}{2}\big),\big(b_1,\frac{\lambda_1}{2}\big),\ldots,\big(b_k,\frac{\lambda_k}{2}\big)\Big) \\
&= \mathrm{Bar}\Big(\Big(\mathrm{Bar}\Big(\big(a_1,\frac{\lambda_1}{2}\big),\ldots,\big(a_k,\frac{\lambda_k}{2}\big)\Big),\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{2}\Big),\Big(\mathrm{Bar}\Big(\big(b_1,\frac{\lambda_1}{2}\big),\ldots,\big(b_k,\frac{\lambda_k}{2}\big)\Big),\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{2}\Big)\Big) \\
&= \mathrm{Bar}\Big(\big(\mathrm{Bar}((a_1,\lambda_1),\ldots,(a_k,\lambda_k)),1\big),\big(\mathrm{Bar}((b_1,\lambda_1),\ldots,(b_k,\lambda_k)),1\big)\Big)
\end{aligned}$$

   Or ce dernier élément est bien dans $\mathcal{M}(A, B)$ car A et B sont des sous-espaces affines, donc $\mathrm{Bar}((a_1,\lambda_1),\ldots,(a_k,\lambda_k)) \in A$ et $\mathrm{Bar}((b_1,\lambda_1),\ldots,(b_k,\lambda_k)) \in B$.

2. L'ensemble $\mathcal{M}(\{a\}, B)$ est constitué des milieux des segments $[a, b]$ pour tout $b \in B$. Or ces milieux sont exactement les images par $h_{a,\frac{1}{2}}$ des éléments de B. On a donc bien $\mathcal{M}(\{a\}, B) = h_{a,\frac{1}{2}}(B)$.

3. Pour montrer que $\mathcal{M}(A, B)$ est convexe, on peut utiliser le même calcul qu'à la question 1. en se restreignant au cas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$.

4. Par construction, $\mathcal{M}([a, b], [c, d])$ contient i, j, k et l, les milieux, respectivement, des points a et c, a et d, b et c, b et d. D'après la question 2. de l'exercice 4, ce sont les quatre sommets d'un parallélogramme. Par ailleurs, les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ étant convexes, il découle de la question 3. que $\mathcal{M}([a, b], [c, d])$ contient toute l'enveloppe convexe de ces quatres points, c'est-à-dire tout "l'intérieure" du parallélogramme.
   Réciproquement, tout point de $\mathcal{M}([a, b], [c, d])$ est un isobarycentre de deux points qui peuvent, eux-même s'écrire comme barycentre à coefficients positifs, d'une part, des points a et b, d'autre part des points c et d. Il découle de l'associativité qu'il peut donc s'écrire comme baryventre à coefficients positifs des points i, j, k et l. En effet, on a pour tout $\lambda, \mu \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bar}\Big(\big(\mathrm{Bar}((a,\lambda),(b,1-\lambda)),1\big),\big(\mathrm{Bar}((c,\mu),(d,1-\mu)),1\big)\Big) &= \mathrm{Bar}\big((a,\lambda),(b,1-\lambda),(c,\mu),(d,1-\mu)\big)\\
&= \mathrm{Bar}\big((a,\lambda\mu),(a,\lambda(1-\mu)),(b,(1-\lambda)\mu),(b,(1-\lambda)(1-\mu)),(c,\lambda\mu),(c,(1-\lambda)\mu),(d,\lambda(1-\mu)),(d,(1-\lambda)(1-\mu))\big)\\
&= \mathrm{Bar}\big((i,\lambda\mu),(j,\lambda(1-\mu)),(k,(1-\lambda)\mu),(l,(1-\lambda)(1-\mu))\big).
\end{aligned}$$