

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen 2nde session

24 juin 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.

Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

L'épreuve dure trois heures.

Exercice 1. (3 pts)

1. Soit E un espace vectoriel. Donner la définition d'un espace affine d'espace directeur E .
2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi: (x, y) &\longmapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

fait de $\mathbb{R}_+^*$ un espace affine d'espace directeur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Donner la définition du milieu de deux points $a, b \in \mathcal{E}$ en précisant les conditions d'existence.
4. Donner la définition géométrique d'une parabole dans un plan euclidien réel.

Exercice 2. (4 pts)

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel.
 - (a) Soit $X \subset \mathcal{E}$ une partie quelconque de $\mathcal{E}$. Donner la définition de $\text{Conv}(X)$, l'enveloppe convexe de X .
 - (b) Montrer que, pour tout $X \subset \mathcal{E}$, $\text{Conv}(X) = \{\text{barycentres à coefficients positifs d'éléments de } X\}$.
2. Dans ce qui suit, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure affine canonique, via la correspondance usuelle $(x + iy \leftrightarrow (x, y))$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\text{Rac}(P)$ l'ensemble des ses racines dans $\mathbb{C}$.
 - (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 1. On note $r_1, \dots, r_\ell$ les éléments de $\text{Rac}(P)$ et $k_1, \dots, k_\ell$ les multiplicités respectives.
 - i. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Rac}(P)$, on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{z - r_i}.$$

- ii. Soit $r \in \text{Rac}(P') \setminus \text{Rac}(P)$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i(r - r_i)}{|r - r_i|^2} = 0.$$

- (b) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\text{Rac}(P') \subset \text{Conv}(\text{Rac}(P))$.

TSVP $\Rightarrow$

Exercice 3. (4 pts)

Soit f une application d'un ensemble dans lui-même. On dit que c 'est une symétrie si $f^2 = \text{Id}$ et que c 'est une projection si $f^2 = f$.

On fixe maintenant $\mathcal{E}$ un espace affine réel et $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine.

1. (a) Montrer que si f est une symétrie, alors elle admet un point fixe.
 (b) Montrer que f est une symétrie ssi elle admet au moins un point fixe et que $\vec{f}$ est une symétrie.
2. Montrer que si f est une projection, alors l'application suivante est une symétrie affine :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & \text{Bar}((x, -1), (f(x), 2)) \end{array} .$$

Exercice 4. (5 pts)

Soit $\mathcal{E}$ un plan euclidien d'espace directeur E . On dit que trois points $a, b_1, b_2 \in \mathcal{E}$ forment un triangle isocèle en a si $\overline{ab_1} = \overline{ab_2}$. Pour tout $u, v \in E$, on note $\theta_{u,v}$ la mesure de l'angle $(\widehat{u, v})$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$.

1. A l'aide d'une réflexion¹, montrer que si trois points distincts $a, b_1, b_2 \in \mathcal{E}$ forment un triangle isocèle en a , alors $\theta_{\vec{b_1a}, \vec{b_1b_2}} = \theta_{\vec{b_2b_1}, \vec{b_2a}}$.
2. Montrer que si $a, b, c \in \mathcal{E}$ sont trois points distincts, alors $\theta_{\vec{ab}, \vec{ac}} + \theta_{\vec{bc}, \vec{ba}} + \theta_{\vec{ca}, \vec{cb}} = \pi$.
3. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ trois points distincts d'un même cercle centré en $o \in \mathcal{E}$.
 (a) Montrer que $\theta_{\vec{ob}, \vec{oa}} = \pi - 2\theta_{\vec{ao}, \vec{ab}}$.
 (b) Montrer que $\theta_{\vec{ob}, \vec{oc}} = 2\theta_{\vec{ab}, \vec{ac}}$.
4. Montrer que si quatre points distincts $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ sont alignés ou cocycliques alors $2\theta_{\vec{ca}, \vec{cb}} = 2\theta_{\vec{da}, \vec{db}}$.

Exercice 5. (7 pts)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit f l'application affine dont la matrice dans la base canonique est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \sqrt{6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f n'est pas un déplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f .
4. Donner la nature géométrique de f .
5. Selon sa nature, déterminer toutes les caractéristiques géométriques de f .

1. au besoin, on pourra utiliser le fait que deux cercles de centres distincts se rencontrent en, au plus, deux points