

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen 2nde session
 corrigé

Exercice 1.

1. Un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur E s'il est non vide et muni d'une application $\varphi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow E$ vérifiant

- $\forall x \in \mathcal{E}, \forall u \in E, \exists! y \in \mathcal{E}, \varphi(x, y) = u$;
- $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z)$.

2. Pour montrer que φ fait de $\mathbb{R}_+^*$ un espace affine d'espace directeur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier les deux points ci-dessus.

Pour le premier, on fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x, y) = u \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = u \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(e^u) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = e^u \Leftrightarrow y = xe^{-u}.$$

Or, $xe^{-u} > 0$. L'équation $\varphi(x, y) = u$ en y admet donc bien une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour le second point, on fixe $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{z}\right) = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}\right) = \ln\left(\frac{x}{z}\right) = \varphi(x, z).$$

3. Le milieu de deux points a et b est défini comme le barycentre $\text{Bar}((a, 1), (b, 1))$. Il existe ssi $1 + 1 = 2$ n'est pas nul dans le corps considéré, c'est-à-dire si ce dernier n'est pas de caractéristique 2.
4. Dans un plan euclidien réel, une parabole est définie comme l'ensemble des points situés à égale distance d'une droite et d'un point donnés, le point n'étant pas sur la droite.

Exercice 2.

1. (a) L'enveloppe convexe de X est définie comme l'intersection de tous les ensembles convexes contenant X , un ensemble étant convexe si tout barycentre à coefficients positifs de ses points est encore dans cet ensemble.

- (b) Notons $\text{Bar}_{\geq 0}(X)$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de X . On procède par double inclusion.

$\text{Conv}(X) \subset \text{Bar}_{\geq 0}(X)$: $\text{Conv}(X)$ étant, par définition, contenu dans tout ensemble convexe contenant X , il suffit de montrer que $\text{Bar}_{\geq 0}(X)$ est un ensemble convexe contenant X . Il contient bien X car tout élément de X est le barycentre de lui-même affecté du coefficient 1, et il est bien convexe par associativité des barycentres. En effet, un barycentre à coefficient positifs d'élément de $\text{Bar}_{\geq 0}(X)$ est un barycentre de barycentres à coefficients positifs, or par associativité, cela peut être décrit comme le barycentre de la concaténation de tous les points pondérés considérés, lesquels sont bien des éléments de X affectés d'un coefficient positif.

$\text{Conv}(X) \supset \text{Bar}_{\geq 0}(X)$: Par définition, tout barycentre à coefficients positifs d'élément de X est dans tout ensemble convexe contenant X et donc dans leur réunion, c'est-à-dire dans $\text{Conv}(X)$.

2. (a) i. Par décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{\ell} (X - r_i)^{k_i}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Par dérivation d'un produit, on a donc

$$P'(X) = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \left(k_i (X - r_i)^{k_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} (X - r_j)^{k_j} \right).$$

En divisant, on obtient alors $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{X - r_i}$, ce qui donne bien le résultat une fois évalué en $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Rac}(P)$.

- ii. En évaluant la formule de la question précédente en r , on obtient $0 = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{r - r_i} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i(\bar{r} - \bar{r}_i)}{|r - r_i|^2}$. En prenant le conjugué de cette égalité, on obtient la relation voulue.

- (b) Soit $r \in \text{Rac}(P')$. Si $r \in \text{Rac}(P)$, alors $r \in \text{Conv}(\text{Rac}(P))$. Sinon, on a d'après la question 2.(a).ii.,

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{|r - r_i|^2} \bar{r}_i \bar{r} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{|r - r_i|^2} (r - r_i) = 0.$$

Autrement dit r est le barycentre des points r_i affectés des coefficients $\frac{k_i}{|r - r_i|^2} > 0$. On a donc $r \in \text{Bar}_{\geq 0}(\text{Rac}(P)) = \text{Conv}(\text{Rac}(P))$. Dans les deux cas, on a bien $r \in \text{Conv}(\text{Rac}(P))$ et donc $\text{Rac}(P') \subset \text{Conv}(\text{Rac}(P))$.

Exercice 3.

- (a) Supposons que f est une symétrie et fixons $x \in \mathcal{E}$. L'application f étant affine, elle préserve les barycentres. Notamment, elle envoie le milieu¹ de x et $f(x)$ sur le milieu de $f(x)$ et $f(f(x)) = x$, c'est-à-dire sur lui-même. Il s'agit donc d'un point fixe.
- (b) Si f est une symétrie, on a vu qu'elle admet un point fixe, et la linéarisé d'une composée étant la composée des linéarisés, on a $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f} \circ \vec{f} = \text{Id}$ et $\vec{f}$ est donc une symétrie.
Réciproquement, supposons que f fixe $x_0 \in \mathcal{E}$ et que $\vec{f} \circ \vec{f} = \text{Id}$. Par composition d'applications affines, $f \circ f$ est affine et on a, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $f(f(x)) = f(f(x_0)) + \vec{f} \circ \vec{f}(\overrightarrow{x_0 x}) = x_0 + \text{Id}(\overrightarrow{x_0 x}) = x_0 + \overrightarrow{x_0 x} = x$. On a donc bien $f \circ f = \text{Id}$ et f est une symétrie.
- Commençons par remarquer qu'en prenant n'importe quel $x \in \mathfrak{Im}(f)$, on obtient un point fixe pour f . Fixons $x_0 \in \mathcal{E}$ un tel point fixe et remarquons qu'alors $h(x_0) = \text{Bar}((x_0, -1), (x_0, 2)) = x_0$. Par propriété du barycentre, on a pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$h(x) = x_0 - \overrightarrow{x_0 x} + 2\overrightarrow{x_0 f(x)} = h(x_0) - \overrightarrow{\text{Id}(\overrightarrow{x_0 x})} + 2\overrightarrow{f(x_0)f(x)} = h(x_0) + (2\vec{f} - \text{Id})(\overrightarrow{x_0 x}),$$

avec $2\vec{f} - \text{Id}$ linéaire. On en déduit que h est linéaire avec $\vec{h} = 2\vec{f} - \text{Id}$. Par ailleurs, f étant une projection, on a $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f} \circ \vec{f} = \text{Id}$ et donc $\vec{h} \circ \vec{h} = (2\vec{f} - \text{Id}) \circ (2\vec{f} - \text{Id}) = 4\vec{f} \circ \vec{f} - 4\vec{f} + \text{Id} = 4\vec{f} - 4\vec{f} + \text{Id} = \text{Id}$. On en déduit que $\vec{h}$ est une symétrie, et puisque h possède des points fixes, on en conclut que h est une symétrie d'après la question 1.(b).

Exercice 4.

- Soit m le milieu entre b_1 et b_2 . Si $m = a$, c'est que b_1 , a et b_2 sont alignés dans cet ordre, et donc $\theta_{b_1 a, b_1 b_2}^{\rightarrow} = 0 = \theta_{b_2 b_1, b_2 a}^{\rightarrow}$. Sinon, on pose D la droite passant par a et m . La réflexion r par rapport à D fixe a et m car $a, m \in D$ et échange b_1 et b_2 . En effet, une réflexion préservant les distances, elle envoie b_1 et b_2 sur l'intersection des cercles de centre a et rayon $\overline{ab_1} = \overline{ab_2}$ et de centre m et rayon $\overline{mb_1} = \overline{mb_2}$. Mais deux

1. $\mathcal{E}$ est un espace affine réel, le corps de base n'est donc pas de caractéristique 2

cercles de centres distincts se rencontrent en au plus deux points, et ces deux cercles s'intersectent déjà en b_1 et b_2 . Ces deux points sont donc globalement fixés, mais ne peuvent être chacun fixé car sinon, on aurait $b_1, b_2 \in D$, et donc a, b_1 et b_2 seraient alignés. Mais alors la restriction $\overrightarrow{ab_1} = \overrightarrow{ab_2}$ imposerait soit que $b_1 = b_2$, ce qui n'est pas possible car les points sont distincts, soit que $a = m$, ce qu'on a supposé ne pas arriver.

Une réflexion est un anti-déplacement, et renverse donc les angles. On a donc $\theta_{\overrightarrow{b_1 a}, \overrightarrow{b_1 b_2}} = -\theta_{\overrightarrow{r(b_1)r(a)}, \overrightarrow{r(b_1)r(b_2)}} = -\theta_{\overrightarrow{b_2 a}, \overrightarrow{b_2 b_1}} = \theta_{\overrightarrow{b_2 b_1}, \overrightarrow{b_2 a}} = \theta_{\overrightarrow{b_2 b_1}, \overrightarrow{b_2 a}}$.

2. Par la relation de Chasles, on a

$$\theta_{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}} + \theta_{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}} + \theta_{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}} = \theta_{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}} + \theta_{\overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ab}} + \theta_{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}} = \theta_{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}} + \theta_{\overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ab}} + \theta_{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}} = \theta_{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ac}} = \pi.$$

3. (a) Si a et b sont sur un cercle centré en o , alors le triangle o, a, b est isocèle en o et on a, d'après la question 1., $\theta_{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ab}} = \theta_{\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bo}}$. D'après, la question 2., on a de plus $\theta_{\overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oa}} + \theta_{\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bo}} + \theta_{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ab}} = \pi$. On en déduit que

$$\theta_{\overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oa}} = \pi - \theta_{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ab}} - \theta_{\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bo}} = \pi - 2\theta_{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ab}}.$$

(b) En appliquant la question précédente aux triangles oab et oac , on obtient $\theta_{\overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oa}} = \pi - 2\theta_{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ab}}$ et $\theta_{\overrightarrow{oc}, \overrightarrow{oa}} = \pi - 2\theta_{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ac}}$. En faisant la différence, on trouve $\theta_{\overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oc}} = 2\theta_{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}}$.

4. Si a, b, c et d sont alignés, alors, selon l'ordre des points, on a $2\theta_{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}} = 2 \times (\pm\pi) = 0 = 2\theta_{\overrightarrow{da}, \overrightarrow{db}}$.

S'ils sont cocycliques, alors, d'après la question précédente et en notant o le centre du cercle qui les contient, on a $2\theta_{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}} = \theta_{\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ob}} = 2\theta_{\overrightarrow{da}, \overrightarrow{db}}$.

Exercice 5.

1. Il suffit de montrer que la matrice de f (ou de manière équivalente, la sous-matrice extraite des trois premières lignes et colonnes) est unitaire, c'est-à-dire que le produit avec sa transposée donne la matrice identité. Cela se vérifie par un calcul direct.

2. L'application f n'est un déplacement que si son déterminant vaut 1. Or

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -1 \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = -1.$$

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = x & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \sqrt{6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \sqrt{6}x_2 + \sqrt{6}x_3 - 4 = 4x_1 \\ -\sqrt{6}x_1 - x_2 + 3x_3 = 4x_2 \\ -\sqrt{6}x_1 + 3x_2 - x_3 + 4\sqrt{6} = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + \sqrt{6}x_2 + \sqrt{6}x_3 = 4 \\ \sqrt{6}x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ \sqrt{6}x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4\sqrt{6} \end{cases} \\ & \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{4}(L_3 - L_2)]{L_1 \leftarrow \sqrt{6}L_1 + 2L_2} \begin{cases} 16x_2 = 4\sqrt{6} \\ \sqrt{6}x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \\ x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} + x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4} \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(3x_3 - 5x_2) = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

L'application f a donc un unique point fixe, à savoir $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$.

4. Selon la classification des isométries et sachant qu'elle n'est pas un déplacement, f ne peut être qu'une symétrie glissée ou une anti-rotation. Mais l'ensemble des points fixes d'une symétrie glissée est soit vide soit égal au plan de symétrie. L'application f est donc une anti-rotation.
5. Les caractéristiques géométriques d'une anti-rotation sont l'axe et l'angle de sa rotation, ainsi que le plan de réflexion.

Pour l'angle, on sait qu'il existe un repère orthonormé dans laquelle la matrice de f est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

où θ est l'angle de la rotation. On a donc, notamment, $\text{Tr}(f) = 2\cos(\theta)$. En calculant cette trace sur la matrice donnée initialement, on obtient $2\cos(\theta) = 1$ et donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Le signe de l'angle dépend du choix d'une orientation pour le plan de réflexion.

L'axe de la rotation passe par le point fixe, il suffit donc d'en déterminer un vecteur directeur. Or, restreinte à cette droite, f est la symétrie par rapport au point fixe, sa linéarisée est donc $-\text{Id}$, et il suffit donc de trouver un vecteur propre de $\vec{f}$ associé à la valeur propre -1 . On cherche donc $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + \sqrt{6}u_2 + \sqrt{6}u_3 = -4u_1 \\ \sqrt{6}u_1 + u_2 - 3u_3 = 4u_2 \\ \sqrt{6}u_1 - 3u_2 + u_3 = 4u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6}u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ \sqrt{6}u_1 - 3u_2 - 3u_3 = 0 \\ \sqrt{6}u_1 - 3u_2 - 3u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sqrt{6}u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ 4u_2 + 4u_3 = 0 \end{cases}.$$

On peut prendre $(u_1, u_2, u_3) = (0, -1, 1)$ et en déduire que l'axe de la rotation est $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right) + \mathbb{R} \cdot (0, -1, 1)$.

Le plan de réflexion est le plan orthogonal à l'axe de rotation, passant par le point fixe. Pour le caractériser pleinement, il suffit donc de trouver deux vecteurs orthogonaux entre eux et avec $(0, -1, 1)$, par exemple $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$. Le plan de réflexion est donc $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, 0) + \mathbb{R} \cdot (0, 1, 1)$.

Enfin, pour finir d'identifier f , il faut déterminer le signe de la rotation. pour cela, on fixe une orientation pour le plan de réflexion en choisissant un repère orthonormé — par exemple $\left(\left(1, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right), (1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)\right)$,

on le complète en un repère orthonormé positif de $\mathbb{R}^3$ — cela donne $\left(\left(1, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right), (1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)\right)$, et, à l'aide de la matrice de changement de repère, on écrit la matrice de f dans ce repère — on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \sqrt{6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

à savoir la matrice d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.