Université Aix-Marseille 2015–2016

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD1 : Espaces, Sous-espaces & Applications affines

Dans tous les exercices qui suivent $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension finie et d'espace directeur E.

Exercice 1. Montrer que

1. $\forall x \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xx} = 0$;
2. $\forall x, y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$;
3. $\forall x, y, w, z \in \mathcal{E}, (\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{wz}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{xw} = \overrightarrow{yz})$ (identité du parallélogramme).

Exercice 2. Montrer que, si $x = o + u$ et $y + v$ avec $o, x, y \in \mathcal{E}$ et $u, v \in E$, alors $\overrightarrow{xy} = v - u$.

Exercice 3. Montrer que $\forall x_0, y_0 \in \mathcal{E}, \forall F \subset E, (x_0 + F = y_0 + G) \Leftrightarrow (F = G$ et $\overrightarrow{x_0 y_0} \in F)$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines tels que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Montrer que $G \subset F$.

Exercice 5. Montrer que deux droites parallèles à une troisième droite sont parallèles entre elles.

Exercice 6. Euclide, en son temps, définissait la géométrie en partant de cinq postulat. Dans le cadre de la géométrie affine, ces postulats peuvent être démontrées.

1. Montrer le premier postulat, c'est-à-dire que par deux points distincts passent toujours une unique droite.
2. Montrer le postulat des parallèles, c'est-à-dire que dans tout espace affine, par un point donné il passe toujours exactement une droite parallèle à une doite donnée.

Exercice 7. Soit $x, y, z, w \in \mathcal{E}$ quatre points distincts non alignés formant un parallélogramme, c'est-à-dire tels que $(xy)/\!/(zw)$ et $(xw)/\!/(yz)$. Montrer que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{wz}$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espace affines de $\mathcal{E}$ d'espaces directeurs respectifs F et G vérifiant $F + G = E$. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines.

1. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
2. (bonus) Montrer que le résultat reste vrai pour tout $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$.
3. (ultra bonus) Qu'en est-il pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$

Exercice 10. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Montrer que

1. f constante $\Leftrightarrow \overrightarrow{f} = 0$;
2. f translation $\Leftrightarrow \overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$.

Exercice 11. Soit $\varphi : E \to E$ une application linéaire. Déterminer toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{f} = \varphi$.

Exercice 12. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Montrer que tous les sous les sous-espaces affines $f^{-1}(y)$, pour $y \in \Im\mathrm{m}(f)$, sont parallèles entre eux.

Exercice 13. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Montrer que f possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 14. On note $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) := \{f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{Id}_E\}$ l'ensemble des dilatations de $\mathcal{E}$. Pour toute dilatation f, on appelle coefficient de f l'unique $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que toute dilatation dont le coefficient est différente de 1 admet un point fixe.
2. Montrer qu'une dilatation est soit une translation, soit une homothétie.
3. Montrer qu'une dilatation est bijective est que son application réciproque est encore une dilatation.
4. Montrer qu'une dilatation envoie une droite sur une droite parallèle.
5. Le but de cette question est de montrer que les dilatations sont exactement les bijections affines qui envoient une droite sur une droite parallèle.
   (a) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une bijection affine envoyant toute droite sur une droite parallèle.
      i. On fixe $x_0 \neq y_0 \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ telle que $g(x_0) = f(x_0)$ et $g(y_0) = f(y_0)$.
      ii. Montrer que $g = f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ bijection affine} \mid \text{pour toute droite } \mathcal{D}, f(\mathcal{D}) \text{ est une droite paralèle à } \mathcal{D}\}$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'espace directeur F, et soit G un supplémentaire de F dans E.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $x + G$ s'intersectent en un unique point.

Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on définit $P(x)$ comme l'unique point dans $\mathcal{F} \cap (x + G)$.

2. Montrer l'application $P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est affine et satisfait $P \circ P = P$.

On appelle P projection sur $\mathcal{F}$ selon G.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, on appelle affinité de base $\mathcal{F}$, parallélement à G et de rapport λ l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $f(x) = P(x) + \lambda\overrightarrow{P(x)x}$ pour tout $x \in \mathcal{E}$.
Si $\lambda = -1$, on parle alors de symétrie.

3. Montrer qu'une affinité est une application affine. Déterminer son linéarisé ainsi que l'ensemble de ses points fixes.
4. On suppose aici que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Montrer qu'une application affine différente de l'identité est involutive (càd de carré égal à l'identité) si et seulement si c'est une symétrie.
5. Montrer que toute homothétie est une affinité dont on précisera la base, la direction et le rapport.

Exercice 16. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ des formes affines et $\mathcal{V} := \{x \in \mathcal{E} \mid \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \varphi_i(x) = 0\}$. Dans ce qui suit, on pourra considérer l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{K}^k \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)) \end{array}$.

1. Montrer que $\mathcal{V}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension $\dim(\mathcal{E}) - \mathrm{rg}(\overrightarrow{\varphi}_1, \ldots, \overrightarrow{\varphi}_k)$.
2. Montrer que si la famille $\{\overrightarrow{\varphi}_1, \ldots, \overrightarrow{\varphi}_k\}$ est libre, alors $\mathcal{V} \neq \emptyset$.