

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD3 : QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE

On considère $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie.

Exercice 1. Quelques résultats préliminaires

1. Soit $x, y, z, w \in \mathcal{E}$ quatre points distincts non alignés tels que $(xy) \parallel (zw)$ et $(xw) \parallel (yz)$. Montrer que $xyzw$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{wz}$.
2. (a) Soit $H \subset E$ un hyperplan de E . Montrer que la relation $x \sim_H y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in H$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.
 (b) Montrer que $\mathcal{E}/H := \mathcal{E}/\sim_H$ est un espace affine d'espace directeur E/H et que la projection canonique $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/H$ est une application affine de linéarisé la projection canonique $\overrightarrow{p} : E \rightarrow E/H$ et de noyau H .
3. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ une base affine du plan réel. Soit $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^2$ trois points et, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ les coordonnées barycentrique de m_i dans la base affine (a, b, c) .
 Montrer que les points m_1, m_2 et m_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. On considère un plan affine muni d'un repère (o, u, v) . Montrer que les droites de paramétrisations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 2. Rapport de longueurs

Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine.

1. Montrer que, pour tout $o \neq a \in \mathcal{D}$ et tout $x, y \in \mathcal{D}$, il existe un unique $\lambda_{x,y}^{o,a} \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{xy} = \lambda_{x,y}^{o,a} \overrightarrow{oa}$.
2. Avec les notations de la question précédente, montrer que, pour tout $x, y \in \mathcal{D}$ et tout $x' \neq y' \in \mathcal{D}$, la quantité $\frac{\lambda_{x,y}^{o,a}}{\lambda_{x',y'}^{o,a}}$ ne dépend pas des points $o \neq a \in \mathcal{D}$.

Pour tout quadruplet $(x, y, z, w) \in \mathcal{E}$ de points alignés tels que $z \neq w$, on définit $\frac{\overrightarrow{xy}}{\overrightarrow{zw}}$ comme le quotient $\frac{\lambda_{x,y}^{o,a}}{\lambda_{z,w}^{o,a}}$ avec $o \neq a$ n'importe quel couple de points distincts de la droite (z, w) .

Exercice 3. Théorème de Thalès

1. Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3 \subset \mathcal{E}$ trois hyperplans parallèles tels que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient distincts, et $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites dont aucune n'est parallèle aux hyperplans $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$. On note H l'espace directeur commun aux trois hyperplans.
 (a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_a = \{a_i\}$ et $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_b = \{b_i\}$ avec $a_i, b_i \in \mathcal{E}$.
 (b) Avec les notations de l'exercice 1.2, montrer que $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{a_1a_2}) = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{b_1b_2})$ et $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{a_1a_3}) = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{b_1b_3})$.

(c) Montrer que $\frac{\overline{a_1 a_3}}{\overline{a_1 a_2}} = \frac{\overline{b_1 b_3}}{\overline{b_1 b_2}}$.

2. Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point o . Montrer que, pour tous points $a_1, a_2 \in \mathcal{D}_a \setminus \{o\}$ et $b_1, b_2 \in \mathcal{D}_b \setminus \{o\}$, on a $(a_1 b_1) \parallel (a_2 b_2)$ si et seulement si $\frac{\overline{oa_2}}{\overline{oa_1}} = \frac{\overline{ob_2}}{\overline{ob_1}}$.

Exercice 4. Théorème de Pappus 1

Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites d'un plan affine $\mathcal{E}$. On se donne $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ tels que $(a_1 b_2) \parallel (a_2 b_1)$ et $(b_1 c_2) \parallel (b_2 c_1)$.

1. On suppose $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$. Montrer que $(a_1 c_2) \parallel (a_2 c_1)$.

2. On suppose $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$.

(b) Montrer que $(a_1 c_2) \parallel (a_2 c_1)$.

Exercice 5. Théorème de Desargues 1

Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(a_1 b_1) \parallel (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) \parallel (b_2 c_2)$ et $(c_1 a_1) \parallel (c_2 a_2)$.

1. (a) Montrer que les points a_1, a_2, b_1 et b_2 sont coplanaires.
 (b) En déduire que les droites $(a_1 a_2)$ et $(b_1 b_2)$ sont ou parallèles, ou sécantes.
2. (a) On suppose que $(a_1 a_2) \cap (b_1 b_2) = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$, et on considère l'homothétie f de centre o qui envoie a_1 sur a_2 .
 i. Montrer que $f(b_1) = b_2$.
 ii. Montrer que $f(c_1) = c_2$.
 iii. En déduire que les droites $(a_1 a_2)$, $b_1 b_2$ et $c_1 c_2$ sont concourantes.
- (b) On suppose que $(a_1 a_2) \parallel (b_1 b_2)$, montrer $(a_1 a_2) \parallel (c_1 c_2) \parallel (b_1 b_2)$.

Exercice 6. Théorème de Ménélaüs

Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.

Montrer que les points a' , b' et c' sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$.

Exercice 7. Théorème de Pappus 2

Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point $o \in \mathcal{E}$. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2$ tels que $(b_1 c_2) \cap (b_2, c_1) = \{\alpha\}$, $(c_1 a_2) \cap (c_2, a_1) = \{\beta\}$ et $(a_1 b_2) \cap (a_2, b_1) = \{\gamma\}$.

Montrer que les points α, β et γ sont alignés.

Exercice 8. Théorème de Ceva

Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.

Montrer que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1$.

Exercice 9. Théorème de Desargues 2

Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(b_1 c_1) \cap (b_2 c_2) = \{\alpha\}$, $(c_1 a_1) \cap (c_2 a_2) = \{\beta\}$ et $(a_1 b_1) \cap (a_2 b_2) = \{\gamma\}$.

Montrer que les points α, β et γ sont alignés si et seulement si les droites $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ et $(c_1 c_2)$ sont parallèles ou concourantes.