

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD5 : ESPACES EUCLIDIENS

Notations

Dans tout ce qui suit \mathcal{E} (resp. \mathcal{F} , \mathcal{G} , etc) est un espace affine euclidien de dimension n d'espace directeur E (resp. F , G , etc) muni du produit scalaire $((u, v) \mapsto \langle u|v \rangle)$. On note alors $d(x, y)$ ou \overline{xy} la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

Pour tout point $o \in \mathcal{E}$ et tout réel positif $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle sphère de centre o et de rayon r l'ensemble $\{x \in \mathcal{E} | d(x, o) = r\}$. Dans le cas $n = 2$, une sphère est appelée cercle.

Pour tous points $a, b \in \mathcal{E}$, on appelle hyperplan médiateur de a et b l'ensemble $\text{med}(a, b) := \{x \in \mathcal{E} | d(x, a) = d(x, b)\}$. Dans le cas $n = 2$, un hyperplan médiateur est appelé médiatrice.

Exercice 1. Montrer que, sur un espace vectoriel euclidien, l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ pour tout $u, v \in E$ est une distance.

Exercice 2. Montrer que, pour tous $x, y, z \in \mathcal{E}$, $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ si et seulement si $y \in \text{Conv}(\{x, z\})$.

Exercice 3.

1. Montrer le théorème d'Al-Kashi, c'est-à-dire que pour tout $a, b, c \in \mathcal{E}$, on a

$$\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + 2\langle \overrightarrow{ab} | \overrightarrow{ac} \rangle.$$

2. Montrer le théorème de Pythagore, c'est-à-dire qu'un triangle abc de \mathcal{E} est rectangle en a si et seulement si $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2$.

Exercice 4. Pour tous $a, b \in \mathcal{E}$, montrer que $\text{med}(a, b) = m + (\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{ab})^\perp$ où m est le milieu de a et b . Déterminer sa dimension.

Exercice 5. Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ une base affine de \mathcal{E} . Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$ définie par $\varphi(x) = (\overline{a_0x}, \dots, \overline{a_nx})$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ est injective. Est-elle surjective ?

Exercice 6. Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ une base affine de \mathcal{E} .

1. Montrer que $\bigcap_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{med}(a_0, a_k) \neq \emptyset$.
2. En déduire qu'il existe une unique sphère passant par tous les points a_0, \dots, a_n .
3. Montrer que $\bigcap_{k \neq l \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{med}(a_k, a_l)$ est un singleton.

Exercice 7. Soit $P := ((a_1, \lambda_1), \dots, (a_k, \lambda_k))$ un système de points pondérés de \mathcal{E} . On considère la fonction $\varphi_P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_P(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{a_i x}^2$.

1. Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, montrer qu'il existe $v_0 \in E$ tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(y) = \varphi_P(x) + 2\langle \overrightarrow{xy} | v_0 \rangle$.
2. Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(x) = \varphi_P(g) + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \overline{xg}^2$ avec $g := \text{Bar}(P)$.
3. Soit $a, b \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de α , l'ensemble des points $x \in \mathbb{E}$ tels que

$$(a) \overline{xa}^2 + \overline{xb}^2 = k \qquad (b) \overline{xa}^2 - \overline{xb}^2 = k \qquad (c) \frac{\overline{xa}}{\overline{xb}} = k$$

Exercice 8. On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont perpendiculaires si F^\perp et G^\perp sont orthogonaux.

1. Montrer que deux sous-espaces affines perpendiculaires ont une intersection non vide.
2. On suppose dans cette question que E est un plan affine. Montrer que deux droites de E sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales.
3. On suppose dans cette question que E est un espace affine de dimension 3.
 - (a) Montrer que deux plans de E sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
 - (b) Montrer que si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
 - (c) Montrer que si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
 - (d) Montrer que deux plans ne sont jamais orthogonaux.