Université Aix-Marseille 2015–2016

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD7 : Angles

Notations
Dans tout ce qui suit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, etc) est un plan affine euclidien orienté d'espace directeur E (resp. F, G, etc) muni du produit scalaire $((u,v) \mapsto \langle u|v\rangle)$. On note alors $d(x,y)$ ou $\overline{xy}$ la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on note $\widehat{(u,v)}$ l'angle orienté entre u et v, θ_{uv} la mesure de cet angle, $\widehat{(u,v)}^g$ l'angle géométrique entre u et v et θ^g_{uv} la mesure de cet angle. Pour toutes droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$, on note $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$ l'angle orienté entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et $\theta_{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2}$ la mesure de cet angle.

On appelle similitude vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ Toute application $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(E)$ telle que $\|\overrightarrow{f}(u)\| = k\|u\|$ pour tout $u \in E$. On appelle similitude affine (de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$) toute application affine $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ telle que $\overrightarrow{f}$ soit une similitude affine. On dit qu'une similitude est directe si son déterminant est positif et indirecte sinon.

Exercice 1. Soit $u, v, u', v' \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $2\widehat{(u,v)} = 2\widehat{(u',v')}$ si et seulement si $(\widehat{\mathbb{R}.u, \mathbb{R}.v}) = (\widehat{\mathbb{R}.u', \mathbb{R}.v'})$.

Exercice 2. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$. Montrer que $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + 2\overline{ab}.\overline{ac}\cos\left(\theta_{\overrightarrow{ab}\overrightarrow{ac}}\right)$.

Exercice 3. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ un triangle dont les sommets sont deux à deux distincts.

1. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}}) + (\widehat{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}}) + (\widehat{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}}) = \pi$.
2. On note $d = a + \overrightarrow{bc}$, $e = c + \overrightarrow{bc}$ et f le milieu de a et c.
   (a) Montrer que la symétrie de centre f envoie a sur c et b sur d.
   (b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}})^g + (\widehat{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}})^g + (\widehat{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}})^g = \pi$.

Exercice 4.

1. Montrer qu'une similitude directe préserve les angles et qu'une similitude indirecte renverse les angles.
2. Soit $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ préservant les angles. On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$ et $u_0 \in E \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe une similitude directe g telle que $g \circ f$ fixe x_0, et $\overrightarrow{g \circ f}$ fixe u_0.
   (b) Montrer que, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_u \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $\overrightarrow{g \circ f}(u) = \lambda_u(u)$.
   (c) Montrer $g \circ f$ est une homothétie.
   (d) En déduire que f est une similitude directe.
3. Soit $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ renversant les angles. Montrer que f est une similitude indirecte.

Exercice 5. Soit a, b et c, trois points distincts sur un cercle de centre $o \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{co}}) = (\widehat{\overrightarrow{ao}, \overrightarrow{ac}})$ et en déduire que $(\widehat{\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{oc}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{co}, \overrightarrow{ca}}) = \pi$.
2. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{oc}, \overrightarrow{ob}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{cb}, \overrightarrow{co}}) = \pi$.
3. En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ob}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}})$.

Exercice 6.

1. Soit a et b, deux points distincts sur un cercle de centre o. Soit $\mathcal{D}$ la tangente au cercle en b, c'est-à-dire la droite orthogonale à (ob) passant par b. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ob}}) = 2(\widehat{(ab), \mathcal{D}})$.

2. Soit $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ quatre points distincts. Montrer qu'ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\widehat{(ca), (cb)}) = (\widehat{(da), (db)})$.