Université Aix-Marseille 2015–2016

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD8 : Coniques

Dans tout ce qui suit, $\Gamma \subset \mathcal{E}$ est une conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F, d'excentricité e, de paramètre p et d'axe focal Δ.

Exercice 1. On appelle cone dans $\mathbb{R}^3$ tout ensemble de la forme $\bigcup_{\theta\in]-\pi,\pi]} r_{\Delta,\theta}(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}, \Delta \subset \mathbb{R}^3$ sont deux droites sécantes distinctes. Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection d'un cone avec un hyperplan est une conique.

Exercice 2.

1. Montrer que, si Γ est une parabole, alors $\Gamma \cap \Delta = \{\text{milieu de } F \text{ et } K\}$.
2. Montrer que, si Γ n'est pas une parabole, alors $\Gamma \cap \Delta = \Big\{\mathrm{Bar}\big((F,1),(K,e)\big), \mathrm{Bar}\big((F,1),(K,-e)\big)\Big\}$.

Exercice 3. Montrer que, connaissant la distance entre un foyer et une directrice, la donnée des points d'une conique permet de déterminer l'excentricité.

Exercice 4. Montrer que deux coniques distinctes se coupent en un nombre fini de points.

Exercice 5.

1. Montrer que, si Γ est une parabole, alors $\Gamma = \{\text{centre d'un cercle tangent à } \mathcal{D} \text{ passant par } F\}$.
2. En déduire une construction à la règle et au compas des points d'une parabole à partir du foyer et de chacun des points de la directrice.

Exercice 6. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ un triangle non aplati. Montrer qu'il existe une ellipse tangente aux trois cotés et par leurs milieux.

Exercice 7. On dit qu'une droite D est tangente à une ellipse Γ si $D \cap \Gamma$ est réduit à un point.

Soit $x \in \Gamma$ un point d' une ellipse qui n'est pas un cercle. On not p l'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'orthogonale à (xF) passant par F. On veux montrer que (px) est tangente à Γ.

1. Soit y un point de (xF) distinct de x. On note x' et y' les projetés orthogonaux de x et y sur $\mathcal{D}$, ainsi qie z le projeté orthogonal de y sur (Fp). Montrer que $\frac{d(x,F)}{d(x,x')} = \frac{d(y,z)}{d(y,y')}$.
2. En déduire que $\frac{d(y,F)}{d(y,y')} > e$ et donc que $y \notin \Gamma$.

Exercice 8. Soit $a \neq b \in \mathcal{E}$ deux points distincts et m leur milieu.

1. Déterminer l'ensemble des points x tels que $d(x,m)^2 + d(x,a)d(x,b) = c$ où $c > 0$ est une constante donnée.
2. Déterminer l'ensemble des points x tels que $d(x,m)^2 = d(x,a)d(x,b)$.

Exercice 9. Soit Γ une ellipse. Montrer qu'il existe un cercle C centré sur o le centre de Γ tel que, pour tout point $x \in \Gamma$, la droite (xx'), où x' est une intersection de Γ avec la droite orthogonale à (ox) passant par o, est tangente à C.