L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen terminal

7 janvier 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.

Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Le résultat d'une question pourra être réutilisé, même dans un autre exercice.

L'épreuve dure trois heures.

Notations

Dans tout le sujet, $\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien d'espace directeur E et on note $\text{GA}(\mathcal{E})$ le groupe des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Pour tous points $A, B \in \mathcal{E}$, on note $\overline{AB}$ la distance entre A et B ; et pour tout point A et toute droite affine $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, on note $d(A, \mathcal{D}) := \min_{B \in \mathcal{D}} \overline{AB}$ la distance entre A et $\mathcal{D}$.

Pour tous points distincts $A, B \in \mathcal{E}$, on note (AB) l'unique droite passant par A et B . Pour tout point A et tout réel $r > 0$, on appelle cercle de centre A et de rayon r l'ensemble $C(A, r) := \{M \in \mathcal{E} \mid \overline{MA} = r\}$.

On appelle médiatrice de deux points distincts $A, B \in \mathcal{E}$ l'ensemble $\{M \in \mathcal{E} \mid \overline{AM} = \overline{BM}\}$.

Pour tout triangle non aplati formé par trois points $A, B, C \in \mathcal{E}$, on appelle médiatrice issue de A la médiatrice des points B et C ; médiane issue de A la droite passant par A et le milieu des points B et C ; hauteur issue de A la droite orthogonale à (BC) passant par A . De plus, on dit que le triangle est équilatéral si $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

On dit qu'une droite affine $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ est tangente à un sous-ensemble $\Gamma \subset \mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{D} \cap \Gamma$ est réduit à un unique point M . On dit alors que M est le point de tangence.

Exercice 1. (2 points) Donner les définitions

1. d'un espace vectoriel euclidien ;
2. d'un angle orienté de $\mathcal{E}$;
3. d'un vissage ;
4. d'une hyperbole de $\mathcal{E}$.

Exercice 2. (3 points) Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ trois points formant une base affine.

1. Montrer que $\mathcal{R} := (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère affine.
2. Soit $M \in \mathcal{E}$ un point.
 - (a) Donner la définition des coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de M dans le repère $\mathcal{R}$.
 - (b) Donner la définition des coordonnées barycentriques $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de M dans la base (A, B, C) .
 - (c) Exprimer (x, y) en fonction de (α, β, γ) et *vice versa*.
3. Exprimer les coordonnées cartésiennes de l'isobarycentre des points A, B et C dans le repère $\mathcal{R}$.

TSVP $\Rightarrow$

Exercice 3. (5 points)

1. Soit $A, B \in \mathcal{E}$ deux points distincts.
 - (a) Montrer que la médiatrice de A et B est la droite orthogonale à (AB) passant par le milieu de A et B .
 - (b) En déduire que si M_1 et M_2 sont deux points à égale distance de A et de B , alors (M_1M_2) est la médiatrice de A et B .
2. (a) Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ et toute droite affine $\mathcal{D}$, il existe un unique point $M_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$, que l'on décrira géométriquement, vérifiant $d(M, \mathcal{D}) = \overline{MM_{\mathcal{D}}}$.
 - (b) Montrer que si $f \in \text{GA}(\mathcal{E})$ est une isométrie fixant un point $M \in \mathcal{E}$, alors pour toute droite affine $\mathcal{D}$, on a $d(M, f(\mathcal{D})) = d(M, \mathcal{D})$.
3. Soit C un cercle de centre O et de rayon r , P un point de C , et $u \in E$ un vecteur unitaire. On note θ la mesure de l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{PO}$ et u .
 - (a) Pour tout point $Q = P + \lambda u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\overline{OQ}$ en fonction de θ , λ et r .
 - (b) Montrer qu'une droite passant par P est tangente à C si et seulement si elle est orthogonale à (OP) .

Exercice 4. (6 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, et soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points distincts sur un cercle C de centre $O \in \mathcal{E}$. Pour tout $k \geq n$, on définit ensuite récursivement A_{k+1} comme la seconde intersection de C avec la droite parallèle à $(A_{k+1-n}A_{k+2-n})$ passant par A_k . On suppose que la construction est bien définie, c'est-à-dire que les points initiaux sont tels que $A_{k+1} \neq A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On définit alors Δ_k la médiatrice de A_k et A_{k+1} , et σ_k la réflexion d'axe Δ_k . On pose enfin $f = \sigma_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \dots \circ \sigma_1$.

1. Faire un dessin pour $n = 4$ représentant $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, et A_7 .
2. (a) Rappeler la définition de la réflexion σ d'axe Δ et montrer que, pour tout $M, M' \in \mathcal{E} \setminus \Delta$, $\sigma(M) = M'$ si et seulement si Δ est la médiatrice des points M et M' .
 - (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{k+1} = \sigma_k(A_k)$.
3. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $O \in \Delta_k$.
 - (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_k = \Delta_{k+n-1}$.
4. (a) Montrer que f est un anti-déplacement.
 - (b) Montrer que f admet un point fixe.
 - (c) En déduire la nature géométrique de f et en conclure que $f^2 = \text{Id}$.
5. Montrer par récurrence que $A_{k+2(n-1)} = A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Qu'en est-il si n est impair.

Exercice 5. (6 points)

1. Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ trois points deux à deux distincts formant un triangle équilatéral. On note O l'isobarycentre de ce triangle.
 - (a) Montrer que la droite (AO) (resp. (BO) , (CO)) est simultanément la médiatrice, la hauteur et la médiane issue de A (resp. B , C) du triangle ABC .
 - (b) Montrer que $d(O, (AB)) = d(O, (BC)) = d(O, (CA))$. On note $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ cette distance commune.
 - (c) En déduire que les droites engendrées par les cotés du triangle ABC sont tangentes à $C(O, r_0)$ et que les points de tangence sont les milieux de chacun des cotés.
2. Montrer que si $\mathcal{D}$ est une droite tangente à $\Gamma \subset \mathcal{E}$, alors pour tout $f \in \text{GA}(\mathcal{E})$, $f(\mathcal{D})$ est tangente à $f(\Gamma)$.
3. Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ formant un triangle non aplati de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe une ellipse ou un cercle Γ tel que les droites engendrées par les cotés du triangle ABC sont tangentes à Γ et que les points de tangence sont les milieux de chacun des cotés.