Université Aix-Marseille	2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel
3 novembre 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Définitions & Notations
Dans tout le sujet, les majuscules cursives désignent des espaces affines réels dont l'espace directeur est noté par la même majuscule en lettre capitale. Ainsi, $\mathcal{E}$ sera un espace affine dirigé par l'espace vectoriel E.

On dit que quatre points $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ forment un *parallélogramme* si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et tout sous-espace directeur G tel que $F \oplus G = E$, on appelle *projection sur* $\mathcal{F}$ *dans la direction* G l'application affine qui envoie tout $x \in \mathcal{E}$ sur l'unique point d'intersection entre $\mathcal{F}$ et $x + G$.

Pour tout point $x_0 \in \mathcal{E}$, on appelle *symétrie centrale autour de* x_0 la symétrie par rapport à $\{x_0\}$ le long de E.

Exercice 1. (5 points)

1. Donner la définition d'une base affine.
2. Donner la définition d'une affinité.
3. Montrer que, dans un plan affine, deux droites non parallèles se coupent en un unique point.
4. Montrer que $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ forment un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[ac]$ et $[bd]$ se coupent en leurs milieux.

Exercice 2. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application affine dont la matrice dans les repères canoniques est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Donner une description explicite, en tant que sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$, de l'image de f.
3. L'image de f est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? L'application f est-elle linéaire ?

Exercice 3. (3 points) Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$. On note a', b', c' les milieux respectifs des segments $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$ et on considère $f := s_{b'} \circ s_{a'}$ et $g := s_{c'} \circ s_{b'} \circ s_{a'}$, où s_x dénote, pour $x \in \mathcal{E}$, la symétrie centrale par rapport à x.

1. (a) Déterminer la linéarisé d'une symétrie centrale, puis celle de f.
   (b) Montrer que f est une translation par un vecteur que l'on exprimera en fonction des points a, b et c.
2. Montrer que g est une symétrie centrale dont on déterminera le centre.

Exercice 4. (5 points) Soit $p \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ une application affine vérifiant $p \circ p = p$. On pose $\mathcal{F} := \mathrm{Fix}(p)$ et $G := \mathrm{Im}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)$.

1. Montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(p) \neq \emptyset$ et que $F = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)$.
2. Montrer que $F \oplus G = E$.
3. Montrer que p est la projection sur $\mathcal{F}$ selon la direction G.

Exercice 5. (4 points) On fixe six points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathcal{E}$. Pour tout $I := \{i, j, k\} \subset [\![1, 6]\!]$ de cardinal 3, on note g_I le centre de gravité du triangle $a_i a_j a_k$ et on suppose que tous les points ainsi formés sont distincts.

1. Montrer que toutes les droites passant par g_I et $g_{[\![1,6]\!] \setminus I}$ sont concourantes.
2. Montrer que les points $g_{\{1,2,3\}}$, $g_{\{1,3,5\}}$, $g_{\{4,5,6\}}$ et $g_{\{2,4,6\}}$ forment un parallélogramme.