

**L3 – Parcours MG**  
**Géométrie affine et euclidienne**

**Examen de rattrapage**

21 juin 2017

*Le résultat d'une question pourra être réutilisé, même dans un autre exercice.*

*Pour peu qu'ils soient énoncés correctement, il en va de même pour les exercices vus en TD.*

*Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.*

*Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.*

*Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.*

*L'épreuve dure trois heures.*

**Exercice 1.** (3 pts)

1. Donner les définitions
  - (a) d'une application affine ;
  - (b) d'une base affine.
2. Énoncer la propriété d'associativité des barycentres.
3. Montrer que  $\mathcal{F}_{1,1} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid f(1) = f'(1) = 1\}$  est un sous-espace affine des fonctions réelles dérivables sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 2.** (2 pts) Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$  et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application affine.

1. Montrer que  $f$  est constante ssi  $\vec{f} = 0$ .
2. Montrer que  $f$  est une translation ssi  $\vec{f} = \text{Id}_E$

**Exercice 3.** (6 pts) Dans cet exercice, on considérera  $\mathcal{P}$  un plan euclidien. Pour toute droite affine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on rappelle que  $a_{\mathcal{D},\lambda} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , l'affinité orthogonale d'axe  $\mathcal{D}$  et de rapport  $\lambda$ , est définie comme l'application qui envoie  $x \in \mathcal{P}$  sur  $h_{\mathcal{D}}(x) + \lambda \overrightarrow{h_{\mathcal{D}}(x)x}$ , où  $h_{\mathcal{D}}$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$ . Dans la suite, on ne considérera que les cas où  $\lambda \neq 1$ .

1. Déterminer la linéarisé de  $a_{\mathcal{D},\lambda}$ .
2. (a) Déterminer toutes les droites stables par  $a_{\mathcal{D},\lambda}$ .  
 (b) Montrer que si deux affinités orthogonales commutent, alors l'ensemble des points fixes de l'une est stable par l'autre.  
 (c) Caractériser géométriquement l'ensemble des couples d'affinités orthogonales qui commutent.

**Exercice 4.** (3 pts) Soit  $\mathcal{E}$  un espace euclidien, et  $C \subset \mathcal{E}$  un sous-ensemble convexe. On dit que  $x \in C$  est *extrémal* si, pour tout  $y_1, y_2 \in C$ ,

$$(\exists \lambda \in [0, 1], x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) \Rightarrow (x = y_1 \text{ ou } x = y_2).$$

Montrer que, pour tout  $x \in C$ ,  $x$  est extrémal si et seulement si  $C \setminus \{x\}$  est convexe.

**TSVP  $\Rightarrow$**

**Exercice 5.** (6 pts) Dans cet exercice, on assimile  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$  via la bijection  $(x + iy \mapsto (x, y))$ . On considère les applications  $f : z \mapsto iz - 7$  et  $g : z \mapsto i\bar{z} - 2$ .

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des applications affines.
2. Déterminer les matrices des applications  $f$  et  $g$  dans le repère affine  $(0, 1, i)$ .
3. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des isométries.
4. Déterminer la nature géométrique de  $f$  et  $g$ , en en donnant les caractéristiques géométriques.