Université Aix-Marseille 2016–2017

**L3 – Parcours MG**
**Géométrie affine et euclidienne**

**Examen de rattrapage**
corrigé

**Exercice 1.**

1. (a) Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines respectivement dirigés par $E$ et $F$. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine si il existe $\overrightarrow{f} : E \to F$ linéaire telle que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on ait $\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})$.

   (b) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie $n$. Des points $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}$ forment une base affine si $\mathrm{Aff}(x_0, \ldots, x_k) = \mathcal{E}$ avec $k = \dim(\mathcal{E})$.

2. L'associativité des barycentes dit que le barycentre des points $x_1, \ldots, x_k$ affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, lorsque $x_i$ est lui-même le barycentre des points $x_i^1, \ldots, x_i^{r_i}$ affectés des coefficients $\mu_i^1, \ldots, \mu_i^{r_i}$, est égal au barycentres de tous les points $x_i^j$ affectés des coefficients $\lambda_i \mu_i^j$.

3. L'ensemble des fonctions dérivables sur $[0, 1]$ est un espace vectoriel, et donc un espace affine avec $\overrightarrow{fg} = g - f$. Pour montrer que $\mathcal{F}_{1,1}$ en est un sous-espace affine, il suffit de montrer que, pour tout $f \in \mathcal{F}_{1,1}$, l'ensemble $\{g - f \mid g \in \mathcal{F}_{1,1}\}$ est un sous-espace vectoriel. Pour cela, on fixe $g, h \in \mathcal{F}_{1,1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ; on a alors $(g-f)+\lambda(h-f) = (g+\lambda(h-f))-f$. Montrons que $g+\lambda(h-f) \in \mathcal{F}_{1,1}$ : d'une part $\big(g+\lambda(h-f)\big)(1) = g(1)+\lambda(h(1)-f(1)) = 1+\lambda(1-1) = 1$, et d'autre part $\big(g+\lambda(h-f)\big)'(1) = g'(1)+\lambda(h'(1)-f'(1)) = 1+\lambda(1-1) = 1$.

**Exercice 2.** On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$.

1. Si $\overrightarrow{f} = 0$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a $f(x) = f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0x}) = f(x_0)$ et donc $f$ est constante.

   Si $f$ est constante, alors pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{u})} = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0)} = 0$ et donc $\overrightarrow{f}$ est nulle.

2. Si $\overrightarrow{f}$ est l'identité, alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, $f(x) = x + \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0f(x_0)} + \overrightarrow{f(x_0)f(x)} = x + \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0f(x_0)} + \overrightarrow{x_0x} = x + \overrightarrow{x_0f(x_0)}$ et donc $f$ est la translation par le vecteur $\overrightarrow{x_0f(x_0)}$.

   Si $f$ est la translation par $\overrightarrow{u}_0 \in E$, alors pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{u})} = \overrightarrow{(x_0 + \overrightarrow{u}_0)(x_0 + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}_0)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{u}_0 = \overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{f}$ est l'identité.

**Exercice 3.**

1. Pour tout $x \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in P$, on a

$$\begin{aligned}
a_{\mathcal{D},\lambda}(x + \overrightarrow{u}) &= h_{\mathcal{D}}(x + \overrightarrow{u}) + \lambda\overrightarrow{h_{\mathcal{D}}(x + \overrightarrow{u})(x + \overrightarrow{u})} \\
&= h_{\mathcal{D}}(x) + \overrightarrow{h}_{\mathcal{D}}(\overrightarrow{u}) + \lambda\Big(\overrightarrow{h_{\mathcal{D}}(x + \overrightarrow{u})h_{\mathcal{D}}(x)} + \overrightarrow{h_{\mathcal{D}}(x)x} + \overrightarrow{x(x + \overrightarrow{u})}\Big) \\
&= h_{\mathcal{D}}(x) + \lambda\overrightarrow{h_{\mathcal{D}}(x)x} + \overrightarrow{h}_{\mathcal{D}}(\overrightarrow{u}) - \lambda\overrightarrow{h}_{\mathcal{D}}(\overrightarrow{u}) + \lambda\overrightarrow{u} \\
&= a_{\mathcal{D},\lambda}(x) + (1 - \lambda)\overrightarrow{h}_{\mathcal{D}}(\overrightarrow{u}) + \lambda\overrightarrow{u}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\overrightarrow{a}_{\mathcal{D},\Lambda} = (1 - \lambda)\overrightarrow{h}_{\mathcal{D}} + \lambda\mathrm{Id}_P$ où $\overrightarrow{h}_{\mathcal{D}}$ est l'application qui fixe $D$ et envoie $D^\perp$ sur zero. Autrement dit $\overrightarrow{a}_{\mathcal{D},\Lambda|D} = \mathrm{Id}_{|D}$ et $\overrightarrow{a}_{\mathcal{D},\Lambda|D^\perp} = \lambda\mathrm{Id}_{|D^\perp}$

2. (a) Si $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ est une droite stable par $a_{\mathcal{D},\lambda}$, alors son espace directeur $D'$ est stable par $\overrightarrow{a}_{\mathcal{D},\lambda}$. L'espace $D'$ est alors dirigé par un vecteur propre de $\overrightarrow{a}_{\mathcal{D},\lambda}$. Or d'après la question précédente, et puisque $\lambda \neq 1$, les espaces propres de $\overrightarrow{a}_{\mathcal{D},\lambda}$ sont $D$ et $D^\perp$. On en déduit que $\mathcal{D}'$ est soit parallèles soit orthogonale à $\mathcal{D}$.

   Mais réciproquement, une doite parallèle à $\mathcal{D}$ n'est stable par $a_{\mathcal{D},\lambda}$ que si elle est égale à $\mathcal{D}$. Toutes les droites orthogonales à $\mathcal{D}$ sont par contre bien stable.

   Au final, les droites stables par $a_{\mathcal{D},\lambda}$ sont exactement $\mathcal{D}$ et les droites orthogonales à $\mathcal{D}$.

   (b) Soit $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}$ et $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$ deux affinités orthogonales qui commutent. Pour tout $x \in \mathrm{Fix}(a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1})$, on a

   $$a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}\Big(a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}(x)\Big) = a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}\Big(a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}(x)\Big) = a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}(x).$$

   On en déduit que $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}(x) \in \mathrm{Fix}(a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1})$ et donc que $\mathrm{Fix}(a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1})$ est stable par $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$. En inversant les rôles de $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}$ et $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$, on obtient que $\mathrm{Fix}(a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2})$ est stable par $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}$.

   (c) Soit $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}$ et $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$ deux affinités orthogonales qui commutent. Puisque $\lambda_1 \neq 1$, on a $\mathrm{Fix}(a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}) = \mathcal{D}_1$. D'après la question précédente, $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$ fixe donc $\mathcal{D}_1$, et d'après la question (a), on a donc $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ ou $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$.

   Réciproquement, considérons $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}$ et $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$ deux affinités orthogonales telles que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ ou $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$. Dans le premier cas, on a clairement $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1} \circ a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2} = a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2} \circ a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1} = a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1\lambda_2}$. Dans le second cas, les deux affinités commutent également car $a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1} \circ a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2}$ et $a_{\mathcal{D}_2,\lambda_2} \circ a_{\mathcal{D}_1,\lambda_1}$ ont :

   - la même linéarisé, à savoir l'application qui vaut $\lambda_1 \mathrm{Id}_{D_2}$ sur $D_2$ et $\lambda_2 \mathrm{Id}_{D_1}$ sur $D_1$ ;
   - un point fixe commun, à savoir l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (lequel existe car $D_2 = D_1^\perp$ et donc $D_1 \oplus D_2 = P$).

   Or une application affine ayant un point fixe est caractérisée par ce point fixe et sa linéarisé.

   Au final, deux affinités orthogonales commutent si et seulement si elles ont le même axe ou des axes orthogonaux.

**Exercice 4.** Si $C \setminus \{x\}$ n'est pas convexe, alors il existe $x_1, x_2 \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$ tels que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \notin C \setminus \{x\}$. Mais puisque $C$ est convexe, on a $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$ et donc $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x$. Mais $x \neq x_1, x_2$ puisque $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$. Par définition, le point $x$ n'est donc pas extrémal.

Réciproquement, supposons que $x$ est extrémal. Considérons $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par convexité de $C$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ est dans $C$. Supposons par l'absurde qu'il n'est pas dans $C \setminus \{x\}$, alors $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x$ et par extrémalité de $x$, on a $x = x_1$ ou $x = x_2$, ce qui est impossible car $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$. On en conclut que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C \setminus \{x\}$ et donc $C \setminus \{x\}$ est convexe.

**Exercice 5.**

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{C}$, on a

   $$f(z + \overrightarrow{u}) = i(z + \overrightarrow{u}) - 7 = iz - 7 + i\overrightarrow{u} = f(z) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

   où $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{u} \mapsto i\overrightarrow{u}$ est bien linéaire. De même pour $g$.

2. Dans cette base, on a

   $$\mathrm{Mat}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}(g) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Il suffit de montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonales, ce qui est immédiat.

4. Le déterminant de $f$ vaut 1, il s'agit donc d'une translation ou d'une rotation, mais comme sa linéarisé n'est pas l'identité, il s'agit d'une rotation d'un angle $\theta_0$ autour d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Sa trace vaut 0, on en déduit que $2\cos(\theta_0) = 0$ et donc que $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$. Le centre $z_0$ est, quant à lui, l'unique point fixe vérifiant $iz_0 - 7 = z_0$, c'est-à-dire $-\frac{7}{2}(1+i)$. En regardant plus précisemment l'image de, par exemple, 1 on conclut enfin que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

   Le déterminant de $g$ vaut $-1$, il s'agit donc d'une réflexion glissée. La direction de l'axe de la réflexion correspond à l'espace propre associé à la valeur propre 1 de la matrice. Dans notre cas, cela donne l'espace engendré par $(1,1)$, ce qui correspond à $1+i$. Le vecteur de la translation de la réflexion glissée est donc de la forme $\mu(1+i)$. L'orthogonal à l'espace directeur de l'axe de la réflexion est, quant à lui, engendré par $1-i$. L'image de 0 par la réflexion sans le glissement est donc de la forme $\lambda(1-i)$. On en déduit que $g(0)$ est de la forme $\lambda(1-i)+\mu(1+i)$. Or $g(0) = -2$. On en déduit que $\lambda = \mu = -1$. Au final, $g$ est la réflexion de la droite $\frac{i-1}{2} + \mathbb{R}(1+i)$ composé avec la translation par $-1-i$.