Université Aix-Marseille	2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD1 : Espaces, Sous-espaces & Applications affines

Dans tous les exercices qui suivent $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension finie et d'espace directeur E.

Exercice 1. Montrer que

1. $\forall x \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{0}$;
2. $\forall x, y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$;
3. $\forall x, y, w, z \in \mathcal{E}, (\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{wz}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{xw} = \overrightarrow{yz})$ (identité du parallélogramme).

Exercice 2.

1. Si la structure affine de $\mathcal{E}$ est définie par l'application
$$\mathcal{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}$$
montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\times E & \to & \mathcal{E} \\ (x,\overrightarrow{u}) & \mapsto & \text{l'unique } y \in \mathcal{E} \text{ tel que } \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} \end{array}$$
définit une action $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ fidèle et transitive de E sur $\mathcal{E}$.
2. Réciproquement, montrez que toute action $\mathcal{A}$ fidèle et transitive de E sur $\mathcal{E}$ induit une application $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{E}\times\mathcal{E} \to E$ définissant une structure affine sur $\mathcal{E}$ telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$.
3. En déduire que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on a $x + \overrightarrow{xy} = y$.

Exercice 3. Montrer que, si $x = o + \overrightarrow{u}$ et $y = o + \overrightarrow{v}$ avec $o, x, y \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, alors $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

Exercice 4. Soit $x, y, z, w \in \mathcal{E}$ quatre points distincts non alignés formant un parallélogramme, c'est-à-dire tels que $(xy) /\!/ (zw)$ et $(xw) /\!/ (yz)$. Montrer que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{wz}$.

Exercice 5. Parmi les espaces suivants, déterminez ceux qui sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$:

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$;
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}$;
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$;
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$;
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x\}$;
6. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$;
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$;
8. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ et } x - y + z = -1\}$.

Exercice 6.

1. Quel est la dimension du plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ contenant les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(-1, 0, 1)$? décrivez explicitement cet espace.
2. Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace affine. Montrer que $\dim(F) \leq \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big) \leq \dim(F) + 1$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour les cas d'égalité.

Exercice 7. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines.

1. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, montrer que $G \subset F$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}$, un sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$ et contenant $\mathcal{G}$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines.

1. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
2. (bonus) Montrer que le résultat reste vrai pour tout $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$.
3. (ultra bonus) Qu'en est-il pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$

Exercice 9. On note $E^{\mathcal{E}} := \{f : \mathcal{E} \to E\}$ l'espace des applications (quelconques) de $\mathcal{E}$ dans E.

1. Montrer que $E^{\mathcal{E}}$ est un espace vectoriel, donc un espace affine.
2. Pour tout $u \in E$, on note $c_u : \mathcal{E} \to E$ l'application constante égale à u. Montrer que l'application $c : E \to E^{\mathcal{E}}$ qui à $u \in E$ associe c_u est une application linéaire injective. Peut-elle être surjective ?
3. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on note $\xi : \mathcal{E} \to E^{\mathcal{E}}$ l'application qui à $x \in \mathcal{E}$ associe
$$\xi_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}.$$
   (a) Montrer que ξ est une injection de $\mathcal{E}$ dans $E^{\mathcal{E}}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $\xi_x - \xi_y = c_{\overrightarrow{xy}}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(\xi)$ est un sous-espace affine de $E^{\mathcal{E}}$ dirigé par $\mathrm{Im}(c)$. Est-ce un sous-espace vectoriel ?
   (d) On suppose que E est de dimension finie $n > 0$.
      i. Décrire $\mathrm{Vect}(\mathrm{Im}(\xi))$.
      ii. Montrer que $\mathrm{Im}(\xi)$ est un hyperplan affine de $\mathrm{Vect}(\mathrm{Im}(\xi))$.

Exercice 10. Montrer que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si il existe $\overrightarrow{f} : E \to F$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$, on ait $f(x + \overrightarrow{u}) = f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

Exercice 11. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Montrer que

1. f constante $\Leftrightarrow \overrightarrow{f} = 0$;
2. f translation $\Leftrightarrow \overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$.

Exercice 12. Soit $\varphi : E \to E$ une application linéaire. Déterminer toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{f} = \varphi$.

Exercice 13. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Montrer que tous les sous les sous-espaces affines $f^{-1}(y)$, pour $y \in \mathrm{Im}(f)$, sont parallèles entre eux.

Exercice 14. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine.

1. Montrer que l'application $\psi_f : \mathcal{E} \to E$ définie par $\psi_f(x) = \overrightarrow{xf(x)}$ est affine de linéarisé $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$.
2. Montrer que f possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 15. On note $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) := \{f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \mid \exists\lambda \in \mathbb{K}^*, \overrightarrow{f} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{Id}}_E\}$ l'ensemble des dilatations de $\mathcal{E}$. Pour toute dilatation f, on appelle coefficient de f l'unique $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\overrightarrow{f} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$.

1. Montrer que toute dilatation dont le coefficient est différente de 1 admet un point fixe.
2. Montrer qu'une dilatation est soit une translation, soit une homothétie.
3. Montrer qu'une dilatation est bijective est que son application réciproque est encore une dilatation.
4. Montrer qu'une dilatation envoie une droite sur une droite parallèle.
5. Le but de cette question est de montrer que les dilatations sont exactement les bijections affines qui envoient une droite sur une droite parallèle.
   (a) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une bijection affine envoyant toute droite sur une droite parallèle.
      i. On fixe $x_0 \neq y_0 \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ telle que $g(x_0) = f(x_0)$ et $g(y_0) = f(y_0)$.
      ii. Montrer que $g = f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ bijection affine} \mid \text{pour toute droite } \mathcal{D}, f(\mathcal{D}) \text{ est une droite paralèle à } \mathcal{D}\}$.

Exercice 16.

1. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'espace directeur F, et soit G un supplémentaire de F dans E.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $x + G$ s'intersectent en un unique point.

   Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on définit $p(x)$ comme l'unique point dans $\mathcal{F} \cap (x + G)$.

   (b) Montrer que l'application $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une projection affine telle que $\mathrm{Fix}(p) = \mathcal{F}$ et $\mathrm{Im}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E) = G$.
2. Soit $p \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ une projection affine. On pose $\mathcal{F} := \mathrm{Fix}(p)$ et $G := \mathrm{Im}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(p) \neq \emptyset$ et que $F = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)$.
   (b) Montrer que $F \oplus G = E$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $p(x)$ est l'unique point dans $\mathcal{F} \cap (x + G)$

Exercice 17.

1. Montrer qu'une affinité est une application affine. Déterminer son linéarisé ainsi que l'ensemble de ses points fixes.
2. Montrer que toute homothétie est une affinité dont on précisera la base, la direction et le rapport.
3. On suppose ici que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Montrer qu'une application affine différente de l'identité est une involution si et seulement si c'est une symétrie.

Exercice 18. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_k : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ des formes affines et $\mathcal{V} := \{x \in \mathcal{E} \mid \forall i \in \{1, \dots, k\}, \varphi_i(x) = 0\}$. Dans ce qui suit, on pourra considérer l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{K}^k \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) \end{array}$.

1. Montrer que $\mathcal{V}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension $\dim(\mathcal{E}) - \mathrm{rg}(\overrightarrow{\varphi}_1, \dots, \overrightarrow{\varphi}_k)$.
2. Montrer que si la famille $\{\overrightarrow{\varphi}_1, \dots, \overrightarrow{\varphi}_k\}$ est libre, alors $\mathcal{V} \neq \emptyset$.