

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD3 : QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE

On considère $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie.

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine.

- (a) Pour tous $a, b \in \mathcal{D}$ et $\vec{u} \in \mathcal{D} \setminus \{\vec{0}\}$, on note $\lambda_{a,b}^{\vec{u}} \in \mathbb{K}$ l'unique scalaire tel que $\vec{ab} = \lambda_{a,b}^{\vec{u}} \cdot \vec{u}$. Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathcal{D}$ tels que $a \neq b$ ou $c \neq d$, la quantité $\frac{ab}{cd} := \frac{\lambda_{a,b}^{\vec{u}}}{\lambda_{c,d}^{\vec{u}}} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ ne dépend pas de $\vec{u}$.
- (b) Montrer que si $g = \alpha a + (1 - \alpha)b$ avec $a, b \in \mathcal{D}$ distincts et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $g \in \mathcal{D}$ et $\frac{ga}{gb} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

2. (a) Soit $H \subset E$ un hyperplan de E et $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in H$. Montrer que $\mathcal{E}/H := \mathcal{E}/\sim_H$ est un espace affine d'espace directeur E/H et que la projection canonique $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/H$ est une application affine de linéarisé la projection canonique $\vec{p} : E \rightarrow E/H$.

(b) i. Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3 \subset \mathcal{E}$ trois hyperplans parallèles d'espace directeur commun H tels que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient distincts. Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites telles que $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \not\subset H$.

α . Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_a = \{a_i\}$ et $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_b = \{b_i\}$ avec $a_i, b_i \in \mathcal{E}$.

β . Avec les notations de la question 2.(a), montrer que $\vec{p}(\overrightarrow{a_1 a_2}) = \vec{p}(\overrightarrow{b_1 b_2})$ et $\vec{p}(\overrightarrow{a_1 a_3}) = \vec{p}(\overrightarrow{b_1 b_3})$.

γ . Montrer que $\frac{a_1 a_3}{a_1 a_2} = \frac{b_1 b_3}{b_1 b_2}$.

ii. **Théorème de Thalès**

Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point o . Montrer que, pour tous points $a_1, a_2 \in \mathcal{D}_a \setminus \{o\}$ et $b_1, b_2 \in \mathcal{D}_b \setminus \{o\}$, on a $(a_1 b_1) \parallel (a_2 b_2)$ si et seulement si $\frac{oa_2}{oa_1} = \frac{ob_2}{ob_1}$.

3. (a) Montrer que si $g = \alpha a + \beta b + (1 - \alpha - \beta)c$ avec $a, b, c \in \mathcal{D}$ non alignés et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors les droites (ab) et (cg) se rencontrent ssi $\alpha + \beta \neq 0$ et le point d'intersection est alors $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}a + \frac{\beta}{\alpha + \beta}b$, c'est-à-dire l'unique point $d \in (ab)$ vérifiant $\frac{da}{db} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

(b) **Théorème de Ceva**

Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.

i. On suppose que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont parallèles. A l'aide du théorème de Thalès, montrer que $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = -1$.

ii. On suppose que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes en un point $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

α . Montrer que $\frac{a'b}{a'c} = -\frac{\gamma}{\beta}$.

β . Montrer que $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = -1$.

iii. On suppose que $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = -1$ et que les droites (aa') , (bb') et (cc') ne sont pas parallèles. Quitte à permuter les points, on suppose que (aa') et (bb') sont sécantes en $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

α . Montrer que $\frac{a'b}{a'c} = -\frac{\gamma}{\beta}$ et que $\frac{b'c}{b'a} = -\frac{\alpha}{\gamma}$.

β . En déduire que $\frac{c'b}{c'a} = -\frac{\alpha}{\beta}$ puis que (cc') passe par m .

4. **Théorème de Ménélaüs**

Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ non alignés et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.

(a) Ecrire les coordonnées barycentriques de a', b', c' dans la base affine a, b, c .

(b) Montrer que les points a', b' et c' sont alignés si et seulement si $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = 1$.

Exercice 2. Théorème de Desargues

1. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(a_1b_1) \parallel (a_2b_2)$, $(b_1c_1) \parallel (b_2c_2)$ et $(c_1a_1) \parallel (c_2a_2)$.
 - (a) Montrer que les droites (a_1a_2) et (b_1b_2) sont ou parallèles, ou sécantes.
 - (b) i. On suppose que $(a_1a_2) \cap (b_1b_2) = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$, et on considère l'homothétie f de centre o qui envoie a_1 sur a_2 .
 - α . Montrer que $f(b_1) = b_2$.
 - β . Montrer que $f(c_1) = c_2$.
 - γ . En déduire que les droites (a_1a_2) , (b_1b_2) et (c_1c_2) sont concourantes.
 - ii. On suppose que $(a_1a_2) \parallel (b_1b_2)$, montrer que $(a_1a_2) \parallel (c_1c_2) \parallel (b_1b_2)$.
2. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(b_1c_1) \cap (b_2c_2) = \{\alpha\}$, $(c_1a_1) \cap (c_2a_2) = \{\beta\}$ et $(a_1b_1) \cap (a_2b_2) = \{\gamma\}$. A l'aide du théorème de Ceva, montrer que les points α, β et γ sont alignés si et seulement si les droites (a_1a_2) , (b_1b_2) et (c_1c_2) sont parallèles ou concourantes.

Exercice 3. Théorème de Pappus

1. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites d'un plan affine $\mathcal{E}$. On se donne $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ tels que $(a_1b_2) \parallel (a_2b_1)$ et $(b_1c_2) \parallel (b_2c_1)$.
 - (a) On suppose $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$. Montrer que $(a_1c_2) \parallel (a_2c_1)$.
 - (b) On suppose $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$.
 - i. Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$.
 - ii. Montrer que $(a_1c_2) \parallel (a_2c_1)$.
2. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point $o \in \mathcal{E}$. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2$ tels que $(b_1c_2) \cap (b_2, c_1) = \{\alpha\}$, $(c_1a_2) \cap (c_2, a_1) = \{\beta\}$ et $(a_1b_2) \cap (a_2, b_1) = \{\gamma\}$. A l'aide du théorème de Ménélaüs, montrer que les points α, β et γ sont alignés.