Université Aix-Marseille 2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD4 : Une caractérisation des applications affines réelles

Exercice 1. Automorphismes réels
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme de corps, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que

- $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, puis pour tout $x \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que, $\varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
3. En déduire que φ est croissante, puis que φ est continue.
4. En déduire que $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
5. Donner un exemple d'automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui ne soit pas l'identité.

Exercice 2. Caractérisation des applications affines réelles
Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels de même dimension finie $n \geq 2$. On considère $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ bijective préservant l'alignement des points. On veut montrer que f est affine.

1. (a) Montrer qu'un sous-ensemble d'un espace affine est un sous-espace affine si et seulement si il contient entièrement toute droite passant par deux de ses points. En déduire que pour tout sous-espace affine $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $f^{-1}(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine.
   (b) Montrer que f envoie une base affine de $\mathcal{E}$ sur une base affine de $\mathcal{F}$. En déduire que les images par f de points affinement libres sont affinement libres.
   (c) Montrer que f envoie tout sous-espace de dimension $k \in \mathbb{N}$ de $\mathcal{E}$ sur un sous-espace de dimension k de $\mathcal{F}$.
   (d) Montrer que f envoie deux droites parallèles sur deux droites parallèles.
2. On fixe maintenant $o \in \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine contenant o, $a \in \mathcal{D}$ et $b \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$.
   (a) On pose $c = o + \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob}$. Montrer que $\{c\} = (a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}) \cap (b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa})$. En déduire que $f(c) = f(o) + \overrightarrow{f(o)f(a)} + \overrightarrow{f(o)f(b)}$.
   (b) Justifier l'existence d'une unique application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(o + \lambda\overrightarrow{oa}) = f(o) + \varphi(\lambda)\overrightarrow{f(o)f(a)}$.
   (c) Soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. On note $m = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ et $m' = o + \lambda'\overrightarrow{oa}$.
      i. Justifier l'existence de $p \in \mathcal{E}$ tel que $(b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}) \cap (m + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}) = \{p\}$ puis de $q \in \mathcal{D}$ tel que $(q + \mathbb{R}.\overrightarrow{bm'}) \cap \mathcal{D} = \{q\}$. Montrer alors que $q = o + (\lambda + \lambda')\overrightarrow{oa}$.
      ii. Justifier l'existence de $r \in (o+\mathbb{R}.\overrightarrow{ob})$ tel que $(mr) /\!/ (ab)$ puis de $s \in \mathcal{D}$ tel que $(bm') /\!/ (rs)$. Montrer alors que $q = o + \lambda.\lambda'\overrightarrow{oa}$.
      iii. En déduire que $\varphi(\lambda + \lambda') = \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda')$ et $\varphi(\lambda.\lambda') = \varphi(\lambda).\varphi(\lambda')$.
   (d) Déduire de ce qui précède que $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
3. Montrer que f est affine.
4. Montrer par des contre-exemples que les conditions "f bijective", "$n \geq 2$" et "$\mathbb{K} = \mathbb{R}$" sont nécessaires.