Université Aix-Marseille 2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD4 : Une caractérisation des applications affines réelles
corrigé

Exercice 1.

1. On travaille d'abord par récurrence sur $x \in \mathbb{N}$. Pour $x = 0$ et 1, le résultat est vrai par définition. Pour $x > 1$, on a $\varphi(x) = \varphi(x-1+1) = \varphi(x-1) + \varphi(1) = x - 1 + 1$ par hypothèse de récurrence, et donc $\varphi(x) = x$.

   Pour $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on a $0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$ et donc $\varphi(x) = -\varphi(-x) = -(-x) = x$ car $-x \in \mathbb{N}$.

   Pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $p = \varphi(p) = \varphi(x.q) = \varphi(x).\varphi(q) = q\varphi(x)$ et donc $\varphi(x) = \frac{p}{q} = x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\varphi(x) = \varphi(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = \varphi(\sqrt{x}).\varphi(\sqrt{x}) = \left(\varphi(\sqrt{x})\right)^2 \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. On a alors $0 \leq y - x$ et, d'après la question précédente, $0 \leq \varphi(y-x) = \varphi(y) - \varphi(x)$. On en déduit que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. L'application φ est donc croissante.

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \eta < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a, par croissance de φ,

   $$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x_0) - \eta = \varphi(x_0) - \varphi(\eta) = \varphi(x_0 - \eta) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_0 + \eta) = \varphi(x_0) + \varphi(\eta) = \varphi(x_0) + \eta < \varphi(x_0) + \varepsilon,$$

   et donc $\varphi(x) \in]\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon[$. L'application φ est donc continue.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x. Mais alors, par continuité de φ, on a $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n = x$. La fonction φ est donc l'identité sur $\mathbb{R}$.

5. L'application de conjugaison $(z \mapsto \overline{z})$ est un automorphisme sur $\mathbb{C}$ distinct de l'identité.

Exercice 2.

1. (a) Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine et $a \neq b \in \mathcal{G}$ sont deux de ses points, alors $(ab) = a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ab} \subset a + G = \mathcal{G}$ car $\overrightarrow{ab} \in G$.

   Réciproquement, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ est un sous-ensemble contenant toutes les droites passant par deux de ses points, alors $\mathcal{G}$ contient tous les barycentres de deux de ses points. Par associativité des barycentres, il contient alors tous les barycentres en les points de $\mathcal{G}$. On en déduit que $\mathcal{G} \subset \mathrm{Aff}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ et donc que $\mathcal{G} = \mathrm{Aff}(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

   On fixe maintenant un sous-espace affine $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Soit $a \neq b \in f^{-1}(\mathcal{G})$, c'est-à-dire tels que $f(a), f(b) \in \mathcal{G}$. Pour tout $c \in \mathcal{E}$ aligné avec a et b, les points $f(a), f(b)$ et $f(c)$ sont alignés par hypothèse sur f. Le point $f(c)$ est donc sur la droite $(f(a)f(b))$ (les points $f(a)$ et $f(b)$ sont bien distincts car f est injective) et donc dans $\mathcal{G}$ puisque $\mathcal{G}$ est un sous-espace affine. On en déduit que $c \in f^{-1}(\mathcal{G})$ et donc que $f^{-1}(\mathcal{G})$ contient toutes les droites passant par deux de ses points. D'après ce qui précède, $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{E}$ est donc un sous-espace affine.

   (b) On fixe $a_0, \cdots, a_n$ une base affine de $\mathcal{E}$. Les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant de même dimension, leurs bases affines ont même cardinal, et il suffit donc de montrer que $f(a_0), \ldots, f(a_n)$ engendrent $\mathcal{F}$ pour prouver qu'ils forment une base affine de $\mathcal{F}$. Considérons donc $\mathcal{G} := \mathrm{Aff}(f(a_0), \ldots, f(a_n))$. D'après ce qui précède, $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine. Mais celui-ci contient $a_0, \ldots, a_n$ qui engendrent $\mathcal{E}$, on a donc $f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$. Or f étant bijective, on en déduit que $\mathcal{G} = f(f^{-1}(\mathcal{G})) = f(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.

   Considérons maintenant $a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{E}$ une famille de points affinement libres. En choisissant successivement a_s dans $\mathcal{E} \setminus \mathrm{Aff}(a_0, \ldots, a_{s-1})$, pour $s = k+1, \ldots, n$, on peut la compléter en une base affine $a_0, \dots, a_n$ de $\mathcal{E}$. Mais d'après ce qui précède, $f(a_0), \dots, f(a_n)$ est alors une base affine de $\mathcal{F}$ qui complète la famille $f(a_0), \dots, f(a_k)$. Cette dernière est donc affinement libre, car si elle engendrait un sous-espace affine de dimension $r < k$, alors on aurait $n = \dim(\mathcal{E}) = \dim\Big(\mathrm{Aff}(f(a_0), \dots, f(a_n))\Big) \leq r + (n-k) < n$.

(c) Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de dimension k, et soit $a_0, \dots, a_k$ une base affine de $\mathcal{G}$. D'après la question précédente, les points $f(a_0), \dots, f(a_k)$ sont affinement libres et engendrent donc un sous-espace affine $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ de dimension k. D'après la question (a), $f^{-1}(\mathcal{H})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Comme il contient $a_0, \dots, a_k$, il contient tout $\mathcal{G}$. Par bijectivité de f, on a donc $f(\mathcal{G}) \subset f(f^{-1}(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathcal{H} \setminus f(\mathcal{G})$. Alors $a_{k+1} := f^{-1}(x_0)$ n'est pas dans $\mathcal{G}$ et $a_0, \dots, a_{k+1}$ forment une famille libre. Toujours d'après la question précédente, $f(a_0), \dots, f(a_{k+1}) = x_0$ forment alors une famille libre, ce qui contredit $x_0 \in \mathcal{H} = \mathrm{Aff}(f(a_0), \dots, f(a_k))$.

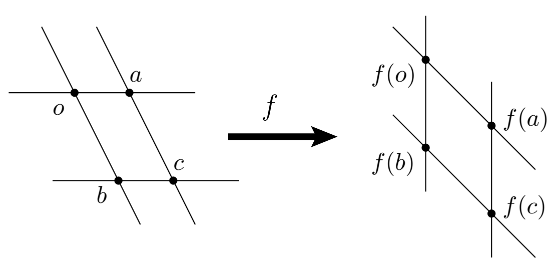
Au final, $f(\mathcal{G}) = \mathcal{H}$ est donc un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de même dimension que $\mathcal{G}$.

(d) Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites parallèles. Si elles sont confondues, alors d'après la question précédente, leur image commune est une droite de $\mathcal{F}$ qui est, bien entendu, parallèle à elle-même. Si elles ne sont pas confondues, alors elles sont disjointes mais contenus dans un même plan $\mathcal{P}$. D'après la question précédente et par bijectivité de f, leurs images sont deux droites disjointes contenues dans $f(\mathcal{P})$ qui est aussi un plan. Or deux droites disjointes contenues dans un plan sont forcément parallèles. En effet, deux vecteurs directeurs des droites, non colinéaires, engendreraient sinon l'espace directeur du plan, et cela imposerait aux droites de se couper.

2. Bien que non précisé dans l'énoncé, on suppose que $o \neq a$, autrement la question (b) deviendrait fausse.

(a) On a $c = o + \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = a + \overrightarrow{ob} \in a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}$. De même $c \in b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}$ et donc $c \in (a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}) \cap (b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa})$. Par ailleurs, $o, a \in \mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{oa}$ est dans l'espace directeur de $\mathcal{D}$, mais $\overrightarrow{ob}$ ne l'est pas car sinon on aurait $b = o + \overrightarrow{ob} \in \mathcal{D}$. Les vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$ sont donc non colinéaires, et les droites $a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}$ et $b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}$ se coupent en un point. On a donc bien $(a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}) \cap (b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}) = \{c\}$.

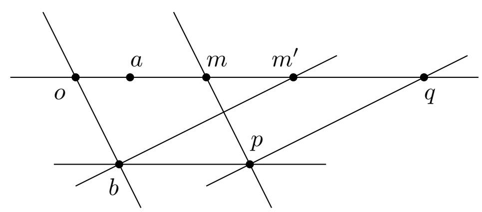
Par injectivité de f, les points $f(o), f(a)$ et $f(b)$ sont distincts, et d'après la question 1.(c), $f(b)$ n'est pas sur $(f(o)f(a))$. En effet, $f(\mathcal{D})$ est une droite contenant $f(o)$ et $f(a)$, il s'agit donc de $(f(o)f(a))$, et si $f(b)$ était dessus, alors il y aurait deux antécédents à $f(b)$, b et un point de $\mathcal{D}$; cela contredirait l'injectivité de f. Par un raisonnement similaire à ce qui précède, on montre alors que $\Big\{f(o) + \overrightarrow{f(o)f(a)} + \overrightarrow{f(o)f(b)}\Big\} = \Big(f(a) + \mathbb{R}.\overrightarrow{f(o)f(b)}\Big) \cap \Big(f(b) + \mathbb{R}.\overrightarrow{f(o)f(a)}\Big)$.



Or $a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}$ est la droite parallèle à (ob) passant par a. D'après la question 1.(d), elle est envoyé par f sur la droite parallèle à $(f(o)f(b))$ passant par $f(a)$, c'est-à-dire sur $f(a) + \mathbb{R}.\overrightarrow{f(o)f(b)}$. De même $f\Big(b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}\Big) = f(b) + \mathbb{R}.\overrightarrow{f(o)f(a)}$. Par injectivité de f, l'intersection c de $a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}$ et $b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}$ est donc envoyé sur l'intersection de $f(a) + \mathbb{R}.\overrightarrow{f(o)f(b)}$ et $f(b) + \mathbb{R}.\overrightarrow{f(o)f(a)}$. On a donc bien $f(c) = f(o) + \overrightarrow{f(o)f(a)} + \overrightarrow{f(o)f(b)}$.

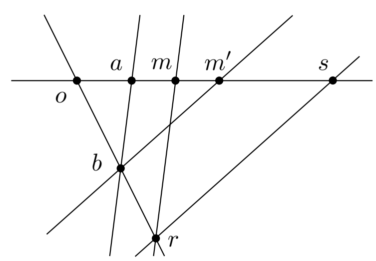
(b) D'après la question 1.(c), la droite (oa) est envoyé sur une droite contenant $f(o)$ et $f(a)$ qui sont distincts par injectivité de f, on a donc $f(oa)) = (f(o)f(a))$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'image de $o + \lambda\overrightarrow{oa}$ est donc un point de $(f(o)f(a))$, lequel s'écrit de manière unique sous la forme $f(o)+\mu\overrightarrow{f(o)f(a)}$, avec $\mu\in\mathbb{R}$. On pose alors $\varphi(\lambda)=\mu$.

(c) i. Les droites $(b+\mathbb{R}.\overrightarrow{oa})$ et $(m+\mathbb{R}.\overrightarrow{ob})$ sont dirigés par des vecteurs non colinéaires mais sont contenues dans le même plan $\mathrm{Aff}(o,a,b)$. Elles se coupent donc en un unique point distinct de m, car les droites (oa) et $b+\mathbb{R}.\overrightarrow{oa}$ sont disjointes, que l'on note p. De même, $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{oa}$ tandis que $p+\mathbb{R}.\overrightarrow{bm'}$ [1] est dirigée par $\overrightarrow{bm'}$ non colinéaire à $\overrightarrow{oa}$, car sinon nous aurions $b=m'-\overrightarrow{bm'}\in\mathcal{D}$. Ces deux droites étant toujours dans le plan $\mathrm{Aff}(o,a,b)$, elles se coupent en un unique point distinct de p, car $p\in b/\mathbb{R}.\overrightarrow{oa}$ et $q\in\mathcal{D}$ sont sur des droites disjoints, que nous notons q.



Si $\lambda=0$, alors $m=o$, $p=b$ et $q=m'$. On a alors clairement $\overrightarrow{oq}=\overrightarrow{om'}=\lambda'\overrightarrow{oa}=(\lambda+\lambda')\overrightarrow{oa}$.
Si $\lambda\neq 0$, par construction, $(mp)\parallel(ob)$ et $(bp)\parallel(om)$. Les points a,b,p,m forment donc un parallélogramme et $\overrightarrow{bp}=\overrightarrow{om}$. De plus, $q\neq m'$, car sinon on aurait $p=b$, $m=o$ et donc $\lambda=0$. Toujours par construction, on a donc $(pq)\parallel(bm')$ et $(bp)\parallel(m'q)$ car $(m'q)=\mathcal{D}$. De fait, b,p,q,m' est également un parallélogramme et on a $\overrightarrow{m'q}=\overrightarrow{bp}$. Par transitivité, on a $\overrightarrow{m'q}=\overrightarrow{om}$ et donc $\overrightarrow{oq}=\overrightarrow{om'}+\overrightarrow{m'q}=\lambda'\overrightarrow{oa}+\lambda\overrightarrow{oa}=(\lambda+\lambda')\overrightarrow{oa}$.

ii. Les vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ab}$ sont non colinéaires, donc les droites (ab) et (ob), contenues dans le plan $\mathrm{Aff}(o,a,b)$, se coupent en un point que l'on note r. Par ailleurs $m'\in\mathcal{D}$, donc (bm') n'est pas pas parallèle à $\mathcal{D}$ car sinon on aurait $b\in\mathcal{D}$. Toujours contenues dans le plan $\mathrm{Aff}(o,a,b)$, la droite $\mathcal{D}$ coupe donc la parallèle à (bm') passant par r en un point que l'on note s.



Si $\lambda=0$, alors $m=o$, $r=o$, et $s=o$. Si $\lambda'=0$, alors $m'=o$ et $s=o$. Dans les deux cas, on a alors clairement $\overrightarrow{os}=\overrightarrow{0}=\lambda.\lambda'\overrightarrow{oa}$.
Si $\lambda,\lambda'\neq 0$, alors $r\neq o$ et donc $r\neq m,s$. Par construction, on a $(mr)\parallel(ab)$ et $(rs)\parallel(bm')$. D'après le théorème de Thalès appliqué aux droites $\mathcal{D}$ et (ob), on a donc $\frac{om}{oa}=\frac{or}{ob}$ et $\frac{or}{ob}=\frac{os}{om'}$. Par transitivité, on a donc $\frac{os}{om'}=\frac{om}{oa}=\lambda$. On en déduit que $\overrightarrow{os}=\lambda\overrightarrow{om'}=\lambda.\lambda'\overrightarrow{oa}$.

iii. D'après la question 1.(d), f envoie des droites parallèles sur des droites parallèles et, par un raisonnement similaire à celui de la question 2.(a), f envoie deux droites distinctes mais sécantes sur deux droites sécantes, l'image de l'intersection étant l'intersection des images. Or, dans les deux questions précédentes, les points p,q,r et s sont justement construits uniquement à l'aide de droites parallèles et d'intersections de droites sécantes. En suivant le même procédé, où o

1. il fallait bien entendu lire $p+\mathbb{R}.\overrightarrow{bm'}$ et $q+\mathbb{R}.\overrightarrow{bm'}$, la question n'ayant alors plus grand sens... désolé.

est remplacé par $f(o)$, a par $f(a)$, b par $f(b)$, m par $f(m) = f(o) + \varphi(\lambda)\overrightarrow{f(o)f(a)}$ et m' par $f(m') = f(o)+\varphi(\lambda')\overrightarrow{f(o)f(a)}$, on construit alors successivement $f(p)$, $f(r)$, $f(q)$ et $f(s)$ et ces deux derniers vérifient donc $f(q) = f(o) + \left(\varphi(\lambda) + \varphi(\lambda')\right)\overrightarrow{f(o)f(a)}$ et $f(r) = f(o) + \varphi(\lambda).\varphi(\lambda')\overrightarrow{f(o)f(a)}$.

Mais $q = o + (\lambda + \lambda')\overrightarrow{oa}$ et donc $f(q) = f(o) + \varphi(\lambda + \lambda')\overrightarrow{f(o)f(a)}$. Par unicité, on a donc $\varphi(\lambda + \lambda') = \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda')$. De même $\varphi(\lambda.\lambda') = \varphi(\lambda).\varphi(\lambda')$.

(d) L'application f induisant une bijection de $\mathcal{D}$ dans $f(\mathcal{D})$, l'application φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même. De plus, on a clairement $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. D'après la question 2.(c).iii. φ est donc un automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui-même, et d'après l'exercice 1, il s'agit donc de l'identité. On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(o + \lambda\overrightarrow{oa}) = f(o) + \lambda\overrightarrow{f(o)f(a)}$.

3. On fixe $o \in \mathcal{E}$ et on considère l'application

$$\overrightarrow{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{f(o)f(o+\overrightarrow{u})} \end{array}.$$

D'après la question 2.(c), en prenant $a = o + \overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et cela reste évidemment vrai pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. De plus, d'après la question 2.(a), en prenant $a = o + \overrightarrow{u}$ et $b = o + \overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ non colinéaires. Cette formule reste vraie pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires car on a alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}((1 + \lambda)\overrightarrow{u}) = (1 + \lambda)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{u})$.

Au final, l'application $\overrightarrow{f}$ est linéaire et f est donc affine.

4. La condition $n \geq 2$ est nécessaire car pour une droite dans une droite, toute application préserve l'alignement des points, mais toutes ne sont pas affine. On pourra par exemple considérer $(x \mapsto x^3)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La condition f bijective est nécessaire pour sensiblement la même raison, car toute application dont l'image est contenue dans une droite préserve l'alignement des points, mais toutes ne sont pas affines. On pourra par exemple considérer $((x, y) \mapsto (x^3, 0))$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Le fait que tout application préservant l'alignement des points est affine n'est pas vrai pour tout corps. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par exemple, l'application $((z_1, z_2) \mapsto (\overline{z}_1, z_2))$ préserve l'alignement des points mais n'est pas affine.