

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD5 : ESPACES EUCLIDIENS

Notations

Dans tout ce qui suit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, etc) est un espace affine euclidien de dimension n d'espace directeur E (resp. F , G , etc) muni du produit scalaire $((u, v) \mapsto \langle u|v \rangle)$. On note alors $d(x, y)$ ou $\overline{xy}$ la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

Pour tout point $o \in \mathcal{E}$ et tout réel positif $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle sphère de centre o et de rayon r l'ensemble $\{x \in \mathcal{E} | d(x, o) = r\}$. Dans le cas $n = 2$, une sphère est appelée cercle.

Pour tous points $a, b \in \mathcal{E}$, on appelle hyperplan médiateur de a et b l'ensemble $\text{med}(a, b) := \{x \in \mathcal{E} | d(x, a) = d(x, b)\}$. Dans le cas $n = 2$, un hyperplan médiateur est appelé médiatrice.

Exercice 1. Montrer que, sur un espace vectoriel euclidien, l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ pour tout $u, v \in E$ est une distance.

Exercice 2. Montrer que, pour tous $x, y, z \in \mathcal{E}$, $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ si et seulement si $y \in \text{Conv}(\{x, z\})$.

Exercice 3.

1. Montrer le théorème d'Al-Kashi, c'est-à-dire que pour tout $a, b, c \in \mathcal{E}$, on a

$$\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + 2\langle \overrightarrow{ab} | \overrightarrow{ac} \rangle.$$

2. Montrer le théorème de Pythagore, c'est-à-dire qu'un triangle abc de $\mathcal{E}$ est rectangle en a si et seulement si $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2$.

Exercice 4. Pour tous $a, b \in \mathcal{E}$, montrer que $\text{med}(a, b) = m + (\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{ab})^\perp$ où m est le milieu de a et b . Déterminer sa dimension.

Exercice 5. Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$ définie par $\varphi(x) = (\overline{a_0x}, \dots, \overline{a_nx})$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ est injective. Est-elle surjective ?

Exercice 6.

1. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, $(F^\perp)^\perp = F$.
2. Montrer que, pour tous sous-espace vectoriel $F, G \subset E$:
 - (a) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;
 - (b) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
 - (c) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 7. Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim \left(\bigcap_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \text{med}(a_0, a_k) \right) = n - p$.
2. En déduire qu'il existe une unique sphère passant par tous les points $a_0, \dots, a_n$.
3. Montrer que $\bigcap_{k \neq l \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{med}(a_k, a_l)$ est un singleton.

Exercice 8. Soit $P := ((a_1, \lambda_1), \dots, (a_k, \lambda_k))$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}$. On considère la fonction $\varphi_P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_P(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{a_i x}^2$.

1. Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, montrer qu'il existe $v_0 \in E$ tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(y) = \varphi_P(x) + 2\langle \vec{xy} | v_0 \rangle$.
2. Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(x) = \varphi_P(g) + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \overline{xg}^2$ avec $g := \text{Bar}(P)$.
3. Soit $a, b \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de α , l'ensemble des points $x \in \mathbb{E}$ tels que

$$(a) \overline{xa}^2 + \overline{xb}^2 = k$$

$$(b) \overline{xa}^2 - \overline{xb}^2 = k$$

$$(c) \frac{\overline{xa}}{\overline{xb}} = k$$

Exercice 9. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine.

1. (a) Pour tout $x \in \mathcal{E}$, montrer qu'il existe un unique $p_{\mathcal{F}}(x) \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{xp_{\mathcal{F}}(x)} \in F^\perp$.
 (b) Montrer que l'application $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine.
2. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on définit $d(x, \mathcal{F}) := \min_{y \in \mathcal{F}} d(x, y)$.
 (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $d(x, \mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{F}$.
 (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $d(x, \mathcal{F}) = d(x, p_{\mathcal{F}}(x))$.
 (c) Réciproquement, montrer que si, pour $y \in \mathcal{F}$, $d(x, y) = d(x, \mathcal{F})$, alors $y = p_{\mathcal{F}}(x)$.

Exercice 10. On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont perpendiculaires si $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux.

1. Montrer que deux sous-espaces affines perpendiculaires ont une intersection non vide.
2. On suppose dans cette question que E est un plan affine. Montrer que deux droites de E sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales.
3. On suppose dans cette question que E est un espace affine de dimension 3.
 (a) Montrer que deux plans de E sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
 (b) Montrer que si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
 (c) Montrer que si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
 (d) Montrer que deux plans ne sont jamais orthogonaux.