Université Aix-Marseille 2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD6 : Isométries

Notations
Dans tout ce qui suit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, etc) est un espace affine euclidien de dimension n d'espace directeur E (resp. F, G, etc) muni du produit scalaire $((u,v) \mapsto \langle u|v\rangle)$. On note alors $d(x,y)$ ou $\overline{xy}$ la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

On appelle similitude vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ Toute application $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(E)$ telle que $\|\overrightarrow{f}(u)\| = \lambda\|u\|$ pour tout $u \in E$. On appelle similitude affine (de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$) toute application affine $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ telle que $\overrightarrow{f}$ soit une similitude vectorielle.

Exercice 1. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application pas nécessairement affine telle que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

1. Montrer que, si $x, y, z \in \mathcal{E}$ sont trois points alignés, alors l'un des trois est compris dans l'enveloppe convexe des deux autres.
2. Montrer que f respecte l'alignement des points.
3. Montrer que f est affine.

Exercice 2.

1. Soit $H \subset E$ un hyperplan. Montrer que, si x_0 est un vecteur engendrant $H^\perp$, alors, pour tout $x \in E$, $s_H(x) = x - 2\frac{\langle x|x_0\rangle}{\|x_0\|^2}x_0$.
2. Montrer que, pour tout $u, v \in E$ tels que $\|u\| = \|v\|$, il existe une réflexion $s \in \mathrm{O}(E)$ telle que $s(u) = v$.
3. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, il existe une réflexion $s \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ telle que $s(x) = y$.

Exercice 3. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1-z \\ x \\ y-2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} z-1 \\ x \\ y+1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que les applications f et g sont des isométries affines.
2. Déterminer la nature géométrique des isométries f et g.

Exercice 4. On appelle carré tout parallélogramme $abcd \in \mathcal{E}$ tel que $\overline{ab} = \overline{bc}$ et $\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{bc}$. On considère maintenant $abcd$ et $aefg$ deux carrés et on pose p, q, r s, les milieux, respectivement, de b et d, d et e, e et g, g et b.

1. Déterminer une rotation envoyant b sur d et e sur g.
2. Montrer que le quadrilatère $pqrs$ est un carré.

Exercice 5.

1. Montrer que toute similitude affine qui ne soit pas une isométrie admet un unique point fixe, que l'on appelle centre de la similitude.

2. Montrer que toute similitude vectorielle est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

3. Classifier les similitudes du plan.

Exercice 6. Soit f un vissage d'axe $\mathcal{D}$.

1. Montrer que $\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{xf(x)} \in D\}$.

2. Montrer que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $x \in \mathcal{E}$ minimisant la distance $\overline{xf(x)}$.

Exercice 7. On appelle tétraèdre l'enveloppe convexe de quatre points affinement indépendants dans l'espace. On dit qu'un tétraèdre est régulier si toutes les distances entre les quatre points sont égales.

1. Montrer que deux tétraèdres réguliers sont envoyés l'un sur l'autre par une similitude.

Soit $a_1a_2a_3a_4$ un tétraèdre régulier. On note $S := \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \mid f(a_1a_2a_3a_4) = a_1a_2a_3a_4\}$.

2. Soit $f \in E$. Montrer que f permutent les points a_1, a_2, a_3 et a_4, et fixe leur isobarycentre.

On considère $\varphi : S \to \Sigma_4$ l'application qui envoie $f \in S$ sur la permutations des sommets du tétraèdre correspondante.

3. Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.

4. Expliciter les éléments de S.

Exercice 8. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$, il existe une application $\varphi : [0, 1] \to \mathrm{Isom}^((\mathcal{E})$ continue (càd telles que, pour une base $\mathcal{B}$ donnée, les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(t))$ sont des fonctions continues en t) telle que $\varphi(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et $\varphi(1) = f$. Justifier alors la terminologie "déplacement" pour les éléments de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$.