L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen terminal
12 janvier 2017

Le résultat d'une question pourra être réutilisé, même dans un autre exercice.
Pour peu qu'ils soient énoncés correctement, il en va de même pour les exercices vus en TD.
Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
L'épreuve dure trois heures.

Exercice 1. (3 points)

1. Donner les définitions
 - (a) d'un barycentre ;
 - (b) d'une anti-rotation ;
 - (c) $\mathcal{E}$ étant un espace affine d'espace directeur E , de la symétrie par rapport à un hyperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ selon une direction $\vec{u} \in E$, en précisant les conditions nécessaires sur $\vec{u}$ pour que cela soit défini.
2. Montrer que la composée de deux symétries par rapport à des hyperplans parallèles et selon une même direction est une translation dont on décrira le vecteur.

Exercice 2. (3 points)

1. Montrer qu'une isométrie f d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est une involution si et seulement si il existe deux points distincts $x_1 \neq x_2 \in \mathcal{P}$ tels que $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_1$.
2. Montrer que le résultat devient faux en dimension trois.

Exercice 3. (5 points) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension paire $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathcal{E}$ un point et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine telle que

- $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ est une base affine de $\mathcal{E}$;
- $f^{n+1}(x_0) = x_0$.

1. Montrer que $f^{n+1} \equiv \text{Id}_{\mathcal{E}}$.
2. Déterminer un point $o \in \mathcal{E}$ fixé par f .
3. Montrer que $\vec{f}$, la linéarisé de f , n'admet aucune valeur propre réelle.
4. En déduire que o est le seul point fixe de f .

Exercice 4. (8 points) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine et a, b, c une base affine pour $\mathcal{P}$; toutes les coordonnées barycentriques qui suivent sont à considérer dans cette base. Soit $m \in \mathcal{P} \setminus \{a, b, c\}$ dont on note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques.

1. (a) Montrer que la droite (am) coupe la droite (bc) si et seulement si $\beta + \gamma \neq 0$, et que l'intersection est alors réduite au point $\frac{\beta}{\beta+\gamma}b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}c$.
 (b) Montrer que si les droites (am) et (cm) coupent respectivement les droites (bc) et (ab) , alors $\alpha\gamma + \beta \neq 0$.
2. On suppose maintenant que les droites (am) , (bm) et (cm) coupent respectivement les droites (bc) , (ca) et (ab) en a' , b' et c' . On note alors d' le symétrique de a' par rapport à (ab) selon la direction $\overrightarrow{cc'}$ et i le milieu entre a' et d' .
 (a) Faire un dessin.
 (b) i. Justifier le fait qu'on puisse parler de la symétrie par rapport à (ab) selon la direction $\overrightarrow{cc'}$.
 ii. Montrer que i est l'intersection des droites $(a'd')$ et (ab) .
 (c) Exprimer les coordonnées barycentriques de a' , b' et c' en fonction α, β et γ .
 (d) i. Montrer que $\overrightarrow{ba'} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bc}$.
 ii. En déduire que $\overrightarrow{bi} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bc'}$, puis que $(1-\alpha)(1-\gamma)\overrightarrow{bi} = \alpha\gamma\overrightarrow{ba}$.
 iii. Exprimer les coordonnées barycentriques de i en fonction de α, β et γ .
 (e) i. Rappeler l'expression des coordonnées barycentriques de i en fonctions de celles de a' et de d' .
 ii. Montrer que les coordonnées barycentriques de d' sont $\left(\frac{2\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)}, \frac{\beta(1+\gamma)}{(1-\alpha)(1-\gamma)}, \frac{\gamma(\gamma-1)}{(1-\alpha)(1-\gamma)}\right)$.
 (f) Montrer que les points b' , c' et d' sont alignés.

Exercice 5. (6 points) On considère l'application

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que f est une isométrie pour la structure euclidienne classique de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Montrer que f est une réflexion glissée dont on note $\mathcal{H}$ le plan de symétrie et $\vec{u}$ le vecteur de translation.
2. (a) Déterminer H l'espace directeur de $\mathcal{H}$.
 (b) Exprimer $f \circ r_H$, où r_H est la symétrie orthogonale par rapport à H , en fonction de $\vec{u}$ et du projeté orthogonal $\vec{v}_0$ de $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{H}$.
 (c) Calculer la matrice de $f \circ r_H$ dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$.
 (d) Déterminer $\vec{v}_0$.
 (e) Déterminer $\mathcal{H}$ et $\vec{u}$.