Université Aix-Marseille	2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen terminal
corrigé

Exercice 1.

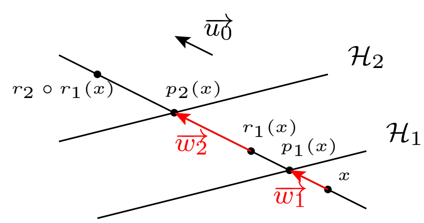
1. (a) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Pour tout système de points pondérés $\mathfrak{S}$ constitué de couples $(x_1, \lambda_1), \ldots, (x_k, \lambda_k) \in \mathcal{E}\times\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$, on appelle *barycentre de* $\mathfrak{S}$ l'unique élément $g \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{gx_i} = \overrightarrow{0}$.

   (b) Une *anti-rotation* est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure euclidienne standard) définie comme la composé d'une rotation non triviale autour d'une droite affine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ et d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal à $\mathcal{D}$.

   (c) Avec les notations de l'énoncé, on appelle *projection sur $\mathcal{H}$ selon la direction $\overrightarrow{u}$* l'application $p_{\mathcal{H},\overrightarrow{u}}$ qui envoie $x \in \mathcal{E}$ sur le point d'intersection entre $\mathcal{H}$ et la droite $x + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. Cette intersection existe et est unique si et seulement si $\overrightarrow{u} \notin H$, l'espace directeur de $\mathcal{H}$. La *symétrie par rapport à $\mathcal{H}$ selon la direction $\overrightarrow{u}$* est alors définie comme l'application

$$s_{\mathcal{H},\overrightarrow{u}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & p_{\mathcal{H},\overrightarrow{u}}(x) - \overrightarrow{p_{\mathcal{H},\overrightarrow{u}}(x)x} \end{array}.$$

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel E. Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}$ deux hyperplans dirigés par un même espace directeur $H \subset E$, et soit $\overrightarrow{u_0} \in E \setminus H$.



En reprenant les notations ci-dessus, on commence par constater que le vecteur $\overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)}$, avec $x \in \mathcal{H}_1$, ne dépend pas de x. En effet, pour tout $x \in \mathcal{H}_1$ et tout $\overrightarrow{u} \in H$, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(x+\overrightarrow{u})p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x+\overrightarrow{u})} &= \overrightarrow{(x+\overrightarrow{u})x} + \overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)} + \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x+\overrightarrow{u})} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)} + \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}}(\overrightarrow{u}) \\ &= -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)} \end{aligned}$$

car la linéarisé de $p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}$ est une projection sur H qui fixe donc les éléments de H.

On note $\overrightarrow{v_0} := \overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x)}$, avec $x \in \mathcal{H}_1$ quelconque. En notant $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{xp_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)} = \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)}$ et $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))} = \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))s_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))}$, on a alors

$$(s_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}} \circ s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}})(x) = s_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(x + 2\overrightarrow{w_1}) = x + 2\overrightarrow{w_1} + 2\overrightarrow{w_2} = x + 2(\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}).$$

Or

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2} & = & \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)}+\overrightarrow{s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))} \\ & = & \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))} \\ & = & \overrightarrow{p_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(p_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))} \;=\; \overrightarrow{v_0}\end{array}$$

car, par construction, $s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x) \in x + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_0})$, ce qui donne $s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_0}) = x + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_0})$ et donc $p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x)) = p_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}}(p_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}(x))$.
Au final, $s_{\mathcal{H}_2,\overrightarrow{u_0}} \circ s_{\mathcal{H}_1,\overrightarrow{u_0}}$ est la translation par $2\overrightarrow{v_0}$.

Exercice 2.

1. Par classification des isométrie du plan, f est soit une translation, soit une rotation, soit une réflexion glissée.

   - Si f est une translation, alors f ne peut pas être une involution, et elle ne peut pas non plus échanger deux points.
   - Si f est une rotation, alors ne peut échanger deux points que s'ils sont diamétralement opposés par rapport au centre de la rotation et que l'angle de la rotation est π. On a dans ce cas $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et tout point distinct du centre de la rotation est échangé par f avec son image.
   - Si f est une réflexion glissée par un vecteur $\overrightarrow{u}$, alors f^2 est la translation par $2\overrightarrow{u}$; f ne peut donc être une involution et/ou échanger deux points que si la translation est triviale et donc que si f est une réflexion simple. C'est alors bien une involution et elle échange tout point hors de la droite de réflexion avec son image.

   On aurait également pu traiter cette question en remarquant que f fixe le milieu des deux points échangés et en considérant le comportement de $\overrightarrow{f}$ sur l'espace directeur D_1 de la droite passant par les deux points échangés par f et sur son orthogonal D_2. Sur D_1, $\overrightarrow{f}$ agit comme $-\mathrm{Id}$. L'application f étant une isométrie, elle stabilise également $D_1^\perp = D_2$ et agit dessus comme $\pm\mathrm{Id}$. Si $\overrightarrow{f}_{|D_2} = \mathrm{Id}$, on tombe sur les réflexions non glissées, et si $\overrightarrow{f}_{|D_2} = -\mathrm{Id}$ sur les rotations d'angle π.
   Réciproquement, il est clair que toute involution échange un point et son image.

2. En dimension 3, les anti-rotations dont l'angle n'est pas un multiple de π sont des exemples d'isométrie qui échangent deux points (il suffit de prendre un point de la droite de rotation distinct de l'intersection avec le plan de réflexion et son image) mais ne sont pas des involutions.

Exercice 3.

1. On a $f^{n+1}(x_0) = x_0$ et donc, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $f^{n+1}\big(f^k(x_0)\big) = f^k\big(f^{n+1}(x_0)\big) = f^k(x_0)$. L'application f^{n+1} fixe de fait la base affine $(x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0))$, il s'agit donc de l'identité sur $\mathcal{E}$.

2. L'isobarycentre o des points $x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0)$ est envoyé sur l'isobarycentre de $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n+1}(x_0) = f(x_0), f^2(x_0), \dots, x_0$, ce qui n'est autre que o. L'application f fixe donc o.

3. La relation $f^{n+1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ induit la relation $\overrightarrow{f}^{n+1} = \mathrm{Id}_E$, où E est l'espace directeur de $\mathcal{E}$. On en déduit que $X^{n+1} - 1$ est un polynôme annulateur de $\overrightarrow{f}$ et donc que le polynôme caractéristique P de $\overrightarrow{f}$ est un diviseur de degré n de $X^{n+1} - 1$. Or, n étant pair, les diviseurs irréductibles de $X^{n+1} - 1$ sont $X - 1$ et des polynômes irréductibles de degré 2 (obtenus en appariant les racines $(n+1)^{\text{ème}}$ de l'unité conjugués). La seule façon de combiner ces polynômes irréductibles de sorte à obtenir un polynôme réel de degré n est donc de les multiplier tous sauf $X - 1$. On en déduit que P n'a que des facteurs irréductibles de degré 2 et donc qu'il n'a pas de racine réelle.

On aurait également pu traiter cette question en écrivant la matrice de f dans le repère

$$\left(o, \overrightarrow{ox_0}, \overrightarrow{of(x_0)}, \dots, \overrightarrow{of^{n-1}(x_0)}\right).$$

A l'aide de la relation $\overrightarrow{of^n(x_0)} = -\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{of^i(x_0)}$, on voit que cette matrice est une matrice compagnon avec que des -1 dans la dernière colonne, et donc que son polynôme caractéristique vaut $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1 = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$ dont les racines complexes sont toutes les racines $(n+1)^{\text{ème}}$ de l'unité sauf 1. Aucune n'est réelle.

4. On a vu en exercice qu'une application affine f admet un unique point fixe si et seulement si $\overrightarrow{f}$ n'admet pas 1 comme valeur propre. C'est bien le cas ici au vu de la question précédente et o est donc l'unique point fixe de f.

   Pour mémoire, ce résultat se montre en considérant l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \overrightarrow{xf(x)} \end{array}$$

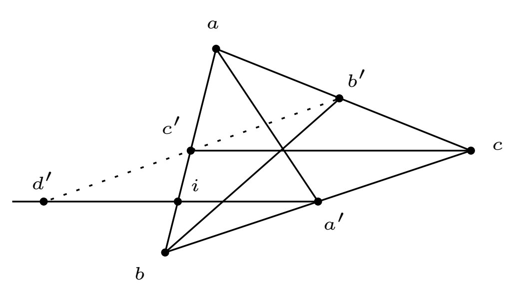
   qui est affine de linéarisé $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$. Les points fixes de f sont alors les antécedents de $\overrightarrow{0}$ par ψ. Or si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ alors $\overrightarrow{\psi}$, et donc ψ, est bijective et $\psi^{-1}(\overrightarrow{0})$ est un espace affine dirigé par $\{\overrightarrow{0}\}$, c'est-à-dire un point.
   Réciproquement, si f ne fixe qu'un seul point $x_0 \in \mathcal{E}$, il ne peut pas y avoir de vecteur $\overrightarrow{u} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u})$ car sinon on aurait $f(x + \overrightarrow{u}) = x + \overrightarrow{u}$.

Exercice 4.

1. (a) Si $\beta + \gamma = 0$, alors $\overrightarrow{am} = \alpha\overrightarrow{aa} + \beta\overrightarrow{ab} + \gamma\overrightarrow{ac} = \beta\overrightarrow{ab} + \gamma\overrightarrow{ab} + \gamma\overrightarrow{bc} = \gamma\overrightarrow{bc}$ et les droites (am) et (bc) sont donc parallèles. Elles ne peuvent pas être confondues car sinon on aurait $a \in (bc)$ et les points a, b, c ne formeraient pas une base.
   Si $\beta+\gamma \neq 0$, alors $\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = 1$ et on peut considérer le point $g := \frac{\beta}{\beta+\gamma}b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}c$. Il s'agit clairement d'un point de (bc). Par ailleurs, on a $\overrightarrow{ag} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{ab} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{ac} = \frac{1}{\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{ab} + \gamma\overrightarrow{ac}) = \frac{1}{\beta+\gamma}(\alpha\overrightarrow{aa} + \beta\overrightarrow{ab} + \gamma\overrightarrow{ac}) = \frac{1}{\beta+\gamma}\overrightarrow{am}$. On en déduit que $g \in (am)$ et donc que (am) et (bc) se coupent en g. Cette intersection est alors nécessairement réduite à ce point car sinon on aurait $(am) = (bc)$ et donc $a \in (bc)$ ce qui est toujours impossible.

   (b) Supposons par l'absurde que $\alpha\gamma + \beta = 0$. En observant que $\beta = 1 - \alpha - \gamma$, on a alors $0 = \alpha\gamma + 1 - \alpha - \gamma = (1-\alpha)(1-\gamma)$. Mais alors ou bien $\beta + \gamma = 1 - \alpha = 0$ ou bien $\alpha + \beta = 1 - \gamma = 0$. D'après la question précédente, le premier cas est interdit par le fait que (am) coupe (bc), le second par le fait que (cm) coupe (ab).

2. (a)



   (b) i. Pour pouvoir parler de la symétrie par rapport à (ab) selon la direction $\overrightarrow{cc'}$ il faut que $\overrightarrow{cc'}$ ne soit pas un multiple de $\overrightarrow{ab}$. or $c' \in (ab)$, donc si c'était le cas, on aurait $c \in (ab)$ ce qui n'est pas possible car a, b, c forment une base affine.

ii. Par construction, l'intersection p de (ab) et $(a'd')$ est le projeté de a' sur (ab) selon la direction $\overrightarrow{a'd'}$, ce qui, toujours par construction, correspond à la direction $\overrightarrow{cc'}$. Or par définition de la symétrie, $d' = p - \overrightarrow{pa'}$ et donc $\overrightarrow{pa'} + \overrightarrow{pd'} = \overrightarrow{0}$. Le point p est donc bien égal au milieu i de a' et d'.

(c) D'après la question 1.(a), les coordonnées barycentriques de a', b' et c' sont

$$a' : \left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right) ; \qquad b' : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right) ; \qquad c' : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0\right).$$

(d) i. On a $\overrightarrow{ba'} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bb} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bc} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bc}$.

ii. Par construction, les droites (cc') et $(a'd') = (a'i)$ sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a donc $\frac{\overline{bi}}{\overline{bc'}} = \frac{\overline{ba'}}{\overline{bc}}$, ce qui se traduit par $\overrightarrow{bi} = \lambda\overrightarrow{bc'}$ et $\overrightarrow{ba'} = \lambda\overrightarrow{bc}$ avec le même $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la question précédente, on a donc $\overrightarrow{bi} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bc'}$.

iii. De la question précédente, on déduit que $\overrightarrow{bi} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bb} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{bc'}$ et donc, par associativité des barycentres,

$$i = \frac{\beta}{\beta+\gamma}b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}c' = \frac{\beta}{\beta+\gamma}b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}b\right) = \frac{\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}a + \frac{\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}b.$$

En utilisant $\alpha+\beta+\gamma = 1$, on obtient donc

$$i : \left(\frac{\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}, \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}, 0\right).$$

(e) i. Le point i étant le milieu des points a' et d', chacune de ses coordonnées barycentriques est la moyenne des coordonnées barycentriques coorespondantes de a' et d'.

ii. D'après la question précédente, chaque coordonné barycentrique de d' est égale à deux fois celle de i, moins celle de a'. On obtient donc

$$d' : \left(\frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} - 0, \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} - \frac{\beta}{\beta+\gamma}, 0 - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right) = \left(\frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}, \frac{\beta(2-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}, \frac{-\gamma}{\beta+\gamma}\right),$$

c'est-à-dire

$$d' : \left(\frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}, \frac{\beta(1+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}, \frac{-\gamma}{\beta+\gamma}\right).$$

En se souvenant que $x+y = 1-z$, avec $\{x, y, z\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, cela donne bien le résultat voulu.

(f) On a vu en exercice que trois points d'un plan sont alignés si et seulement si s'annule le déterminant de la matrice dont les lignes (ou colonnes) sont les coordonnées barycentriques de chacun des points. Il suffit donc de calculer

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} & \frac{\beta(1+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} & \frac{-\gamma}{\beta+\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} & 0 & \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} & 0 \end{vmatrix}
&= \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} \frac{2\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} & \frac{1+\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} & \frac{-1}{\beta+\gamma} \\ \frac{1}{\alpha+\gamma} & 0 & \frac{1}{\alpha+\gamma} \\ \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)} \begin{vmatrix} 2\gamma & 1+\gamma & -(\alpha+\beta) \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)} \begin{vmatrix} 2\gamma & 1+\gamma & \gamma-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

car la première colonne est clairement la somme des deux autres.

Exercice 5.

1. (a) Par calcul direct, f est une application affine dont la matrice dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pour montrer que f est une isométrie, il suffit de montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle, c'est-à-dire que les colonnes de sa matrice dans la base (orthonormée) canonique de $\mathbb{R}^3$ forment une base orthonormée. Or cette matrice est obtenue en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne ci-dessus. Cela donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et de fait :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\ ; \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ ; \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\ ; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0\ ; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0\ ; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

(b) Toujours à l'aide de la matrice ci-dessus, on commence par calculer le déterminant de $\overrightarrow{f}$. En développant selon la seconde ligne, on obtient :

$$-\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Par classification des isométries et des déplacements de $\mathbb{R}^3$, on en déduit donc que f est soit une réflexion glissée, soit une anti-rotation. Mais pour une anti-rotation, il existe une base pour laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in]-\pi, \pi[$. La trace est alors $2\cos(\theta) - 1 < 1$. Or $\mathrm{Tr}(\overrightarrow{f}) = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$. L'application f est donc une réflexion glissée.

2. (a) L'espace H correspond à l'espace directeur des points fixés par f, c'est dont l'espace propre de $\overrightarrow{f}$ associé à la valeur propre 1. On cherche donc à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = x \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = y \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{x}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} - y + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{2} = 0 \end{array}\right.$$

dont les trois lignes sont équivalentes à $z = x + \sqrt{2}y$. On a donc, par exemple

$$H = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1),(0,1,\sqrt{2})\Big)$$

(b) Les plans $\mathcal{H}$ et H sont parallèles, donc d'après la question 2. de l'exercice 1, la composé des symétries orthogonales $r_{\mathcal{H}}$ et r_H selon les deux plans est égale à la translation $t_{2\overrightarrow{v_0}}$ puisque $(0,0,0) \in H$. Par ailleurs, on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_{\mathcal{H}}$. On en déduit que $f \circ r_H = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_{\mathcal{H}} \circ r_H = t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{2\overrightarrow{v_0}} = t_{\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v_0}}$ est la translation par le vecteur $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v_0}$.

(c) L'application r_H n'est autre que $\overrightarrow{f}$ dont on connait déjà la matrice. On en déduit que la matrice de $f \circ r_H$ dans le repère canonique est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

à savoir celle de la translation par le vecteur $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$.

(d) D'après les deux questions précédentes, on a $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v_0} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$. Or $\overrightarrow{u} \in H$ et $2\overrightarrow{v_0} \in H^\perp$. Pour obtenir $2\overrightarrow{v_0}$, il suffit donc de projeter $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v_0}$ sur un vecteur orthogonal à H, c'est-à-dire orthogonal à $(1,0,1)$ et $(0,1,\sqrt{2})$. On pourra prendre $(1,\sqrt{2},-1)$. On en déduit que

$$2\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{\|(1,\sqrt{2},-1)\|^2}\left\langle\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right),\left(1,\sqrt{2},-1\right)\right\rangle \cdot \left(1,\sqrt{2},-1\right) = (0,0,0),$$

et donc que $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$.

(e) Puisque $\overrightarrow{v_0} \in \mathcal{H}$, on a $\mathcal{H} = H = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1),(0,1,\sqrt{2})\Big)$, ainsi que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v_0} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$.