Université Aix-Marseille	2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

COURS

Introduction

1 Formes quadratiques & Géométrie vectorielle euclidienne

Soit E un espace vectoriel réel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

1.1 Formes quadratiques

1.1.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

Définition 1.1.1. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables. On dit qu'elle est *symétrique* si, de plus, elle vérifie $\varphi \circ \sigma = \varphi$ où $\sigma : E \times E \to E \times E$ est l'application $((x, y) \mapsto (y, x))$ de permutation. On note, respectivement, $\mathrm{Bil}(E)$ et $\mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(E)$ les ensembles des applications bilinéaires et bilinéaires symétriques sur E.

Remarque 1.1.2. Bien entendu, on peut définir les formes bilinéaires sur tout produit $E \times F$ d'espaces vectoriels, mais dans la suite, nous n'utiliserons que le cas $F = E$.

Exemples 1.1.3.

1. Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, l'application $\big((x, y) \mapsto f(x)g(y)\big)$ est bilinéaire.
2. En notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans une base donnée, l'application $((x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i)$ est bilinéaire symétrique.

Proposition 1.1.4. Les ensembles $\mathrm{Bil}(E)$ et $\mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(E)$ sont des espaces vectoriels réels.

Définition 1.1.5. On appelle *forme quadratique* sur E toute application de la forme $\varphi \circ \delta$ où $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ et $\delta : E \to E \times E$ est l'application $(x \mapsto (x, x))$ de dédoublement. On note $\mathrm{Quad}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E. On dit que deux formes quadratiques q_1 et q_2 sont *équivalentes* s'il existe $f \in \mathcal{GL}(E)$ telle que $q_2 = q_1 \circ f$.

Notation 1.1.6. Si l'on a besoin de préciser la forme bilinéaire sous-jacente, on notera $q_\varphi \in \mathrm{Quad}(E)$ la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$.

Exemple 1.1.7. La norme $\| \, . \, \|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est une forme quadratique, ainsi que toute application $x \mapsto \big(f(x)\big)^2$ où f est une forme linéaire.

Proposition 1.1.8. L'ensemble $\mathrm{Quad}(E)$ est un espace vectoriel réel.

Remarque 1.1.9. Si $q_\varphi \in \mathrm{Quad}(E)$, alors pour tout $x, y \in E$ on a

$$q_\varphi(x + y) - q_\varphi(x) - q_\varphi(y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y)_\varphi - q(x - y)_\varphi\big) = \varphi(x, y) + \varphi(y, x).$$

Réciproquement, on a :

Proposition–Définition 1.1.10. Pour tout $q \in \mathrm{Quad}(E)$, l'application $\varphi_q : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$ est une application bilinéaire symétrique que l'on appelle *forme polaire associée à q*.

Remarques 1.1.11.

1. Cette définition impose de travailler sur un corps de caractéristique différente de 2.
2. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$, on a $\varphi_{q_\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi \circ \sigma)$ où σ est l'application de permutation des arguments.

Remarque 1.1.12. Toute définition associée aux formes bilinéaires s'étend donc naturellement aux formes quadratiques en considérant la forme polaire associée. Et réciproquement, toute définition associée aux formes quadratiques s'étend naturellement aux formes bilinéaires en considérant la composition par l'application de dédoublement.

Théorème 1.1.13. L'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}} & \to & \mathrm{Quad} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ \delta \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriels.

Démonstration. L'application $(q \mapsto \varphi_q)$ donne une réciproque. □

Remarque 1.1.14. En caractéristique 2, ce résultat devient faux. On pourra, par exemple, considérer la forme bilinéaire sur $\mathbb{F}_2^2$ définie par $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dont la forme quadratique associée est nulle.

Remarque 1.1.15. Pour déterminer la polaire associée à une forme quadratique, on peut utiliser la formule qui la définit ou chercher, à la main, une forme bilinéaire symétrique qui donne cette forme quadratique. L'injectivité de l'application ci-dessus assure qu'il s'agit alors bien de la polaire. Nous reviendrons sur cette stratégie plus tard.

Exemple 1.1.16. Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$. En notant φ sa forme polaire, on a alors

$$\begin{array}{rcl} \varphi((1,0),(1,0)) & = & \frac{1}{4}\Big(q(2,0) - q(0,0)\Big) = 1 \ ; \\ \varphi((1,0),(0,1)) & = & \frac{1}{4}\Big(q(1,1) - q(1,-1)\Big) = \frac{3}{2} \ ; \\ \varphi((0,1),(0,1)) & = & \frac{1}{4}\Big(q(0,2) - q(0,0)\Big) = -1. \end{array}$$

On en déduit que $\varphi(x,y) = x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 - x_2y_2$.

A posteriori, on peut vérifier que la forme quadratique associée à cette forme bilinéaire φ est bien q.

1.1.2 Dualité et écriture matricielle

Dans cette section, dès lors que E sera de dimension finie, on en fixera une base $(e_1, \ldots, x_n)$.

Définition 1.1.17. On appelle *espace dual* de E, noté E^*, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition–Définition 1.1.18. Si E est de dimension finie, alors les éléments $e_1^*, \ldots, e_n^* \in E^*$ définis par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, forment une base de E^* que l'on appelle base duale à $e_1, \ldots, e_n$.

Démonstration. Supposons que $\sum \lambda_i e_i^* \equiv 0$, alors, pour tout j, on a $0 = \sum \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j$. Les e_i^* forment donc une famille libre. De plus, pour tout $f \in E^*$, on vérifie directement sur les e_i que $f = \sum f(e_i).e_i^*$. □

Corollaire 1.1.19. Si E est de dimension finie, alors E^* aussi et on a $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Remarque 1.1.20. Il n'y a pas, en général, d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel et son dual, mais, en dimension finie, il y en a un entre un espace et son bidual (dual de son dual).

Proposition 1.1.21. L'application $\psi : x \mapsto (f \mapsto f(x))$ définit une injection canonique de E dans son bidual $(E^*)^*$. En dimension finie, il s'agit d'un isomorphisme.

Démonstration. La linéarité des éléments de E^* implique celle de ψ. De plus, si $f \in E^*$ annule ψ, alors f s'annule en tout $x \in E$, f est donc identiquement nulle.

En dimension finie, on conclut par un argument de dimension. □

Définition 1.1.22. Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$. On définit les applications suivantes :

$$R(\varphi) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ y & \longmapsto & (x \mapsto \varphi(x,y)) \end{array} \qquad L(\varphi) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & (y \mapsto \varphi(x,y)) \end{array}.$$

Remarque 1.1.23. On a, pour tout $x, y \in E$, $(R(\varphi)(x))(y) = \varphi(y,x)$ tandis que $(L(\varphi)(x))(y) = \varphi(x,y)$. Notamment, pour tout $q \in \mathrm{Quad}(E)$, on a $R(q) = L(q)$.

Proposition 1.1.24. Les applications $R, L \colon \mathrm{Bil} \longrightarrow \mathcal{L}(E, E^*)$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Démonstration. Il suffit de tout vérifier pour L, les résultats sur R se déduisant par composition par $\sigma : E \times E \to E \times E$, l'application de permutation, qui est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels. La linéarité se vérifie directement et on peut donner une réciproque explicite par $(L^{-1}(f))(x,y) = (f(x))(y)$. □

Corollaire 1.1.25. Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Bil}(E)$ aussi avec $\dim(\mathrm{Bil}(E)) = (\dim(E))^2$.

D'ici la fin de cette sous-section, nous supposons que E est de dimension finie.

Définition 1.1.26. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$. On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(R(\varphi))$.

Proposition 1.1.27. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors pour tout i, j, on a $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de $(R(\varphi))(e_i) = \sum_j \Big((R(\varphi))(e_i)\Big)(e_j).e_j^*$. □

Corollaire 1.1.28. Pour tout base $\mathcal{B}$ et toute $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$, on a

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(L(\varphi)) = \mathrm{Mat}^t_{\mathcal{B}}(\varphi)$;
2. φ est symétrique ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ l'est ;
3. pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x,y) = X^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) Y$ où X et Y sont, respectivement, les vecteurs-colonnes de x et y dans la base $\mathcal{B}$.

Corollaire 1.1.29 (du point 2.)**.** Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(E)$ aussi, avec $\dim(\mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(E)) = \frac{\dim(E)(\dim(E)+1)}{2}$.

Corollaire 1.1.30 (du point 3.)**.** Etant donnée une base de E, toute forme bilinéaire φ s'écrit comme polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées dans cette base des deux arguments. C'est-à-dire, en notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $x \in E$, il existe $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$.
Avec les même notations, toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$ s'écrit donc comme un polynôme homogène de degré deux en les coordonnées de son argument, c'est-à-dire il existe $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x,y) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j$.

Remarque 1.1.31. Dans une base donnée, toute forme quadratique est donc donnée par un polynôme homogène de degré 2, par unicité de sa forme polaire associée, cette dernière est donc obtenue en "dédoublant" les variables :

$$a_{ii} x_i^2 \mapsto a_{ii} x_i y_i \qquad a_{ij} x_i x_j \mapsto \frac{a_{ij}}{2} x_i y_j + \frac{a_{ij}}{2} x_j y_i.$$

Cela permet de retrouver très rapidement le résultat de l'exemple 1.1.16.

Proposition 1.1.32. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases pour E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P$ où $P = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Définition 1.1.33. On dit que deux matrices A et B sont congruentes ssi il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^t AB$, autrement dit ssi elles représentent la même forme bilinéaire dans deux bases différentes.

Exemple 1.1.34. La matrice dans une base associée à la norme $\|\ .\ \|_2$ pour cette même base est la matrice identité.

Soit q_1 la forme polaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$. Par dédoublement des variables, sa forme polaire est donnée par $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Sa matrice dans la base canonique est donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit q_2 la forme polaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q_2(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - x_3^2$. Par dédoublement des variables, sa forme polaire est donnée par $\varphi_2(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3$. Sa matrice dans la base canonique est donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut observer que $M_2 = P^t M_1 P$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Les formes q_1 et q_2 sont donc équivalentes, c'est-à-dire que q_2 représente q_1 dans une autre base.

1.1.3 Rang, dégénérescence et cône isotrope

Définition 1.1.35. Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$.

1. On appelle *rang de* φ, noté $\mathrm{rg}(\varphi)$, le rang de $R(\varphi)$ ou, de manière équivalente, celui de $L(\varphi)$ ou de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
2. On appelle *noyau de* φ, noté $\mathrm{Ker}(\varphi)$, le noyau de $R(\varphi)$.
3. On dit que φ est *non dégénérée à droite* (resp. *à gauche*) si l'application $R(\varphi)$ (resp. $L(\varphi)$) est injective. On dit qu'elle est *non dégénérée* si elle l'est à droite et à gauche.

Proposition 1.1.36. Si E est de dimension finie, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. φ est non dégénérée ;
2. φ est non dégénérée à droite ;
3. φ est non dégénérée à gauche ;
4. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$;
5. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est inversible ;
6. $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E)$;
7. $R(\varphi)$ est surjective ;
8. $L(\varphi)$ est surjective.

Exemple 1.1.37. Reprenons la forme quadratique q_1 de l'exemple 1.1.34. Les deux premières colonnes de M_1 étant liées, son déterminant vaut 0. L'application $R(q_1)$ n'est donc pas injective, et q_1 est donc dégénérée. De plus, son rang vaut au plus 2, mais son image contient clairement $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, -1)$. On a donc $\mathrm{rg}(q_1) = 2$. Le noyau de M_1 est donc de dimension 1, et il contient clairement $(1, -1, 0)$, on a donc $\mathrm{Ker}(q_1) = \{(\lambda, \lambda, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Considérons maintenant la forme quadratique q_3 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q_3(x) = 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$. Sa matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est 1. L'application est $R(q_3)$ est donc injective. On en déduit que q_3 est non dégénérée, que $\mathrm{rg}(q_3) = 3$ et que $\mathrm{Ker}(q_3) = \{0\}$.

Définition 1.1.38. Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$. On appelle *cône isotrope de q*, noté $\mathrm{Cone}(q)$, l'ensemble $\{x \in E | q(x) = 0\}$. On dit que q est *définie* ssi $\mathrm{Cone}(q) = \{0\}$.

Remarque 1.1.39. Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$. Si $x \in \mathrm{Cone}(q)$, alors $\lambda x \in \mathrm{Cone}(q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. cela justifie le terme "cône".

Exemple 1.1.40. Considérons la forme quadratique $q : x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et tâchons de déterminer son cône isotrope, c'est-à-dire l'ensemble des triplets (x_1, x_2x_3) tels que $x_1^2 + x_2 - x_3 = 0$. Pour cela, on va considérer l'intersection du cône avec les différents plans $x_3 = \text{cst}$. Si $x_3 = 0$, alors on a $x_1^2 + x_2^2 = 0$ et donc $x_1 = x_2 = 0$. Sinon, on a $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 > 0$, ce qui correspond à un cercle. L'ensemble $\mathrm{Cone}(q)$ est donc un vrai cône cylindrique autour de l'axe des x_3. On aurait aussi pu fixer x_1 au lieu de x_3, sur chaque plan, on aurait alors obtenu des hyperboles.

Enfin, on peut remarquer que q n'est donc pas définie mais qu'elle n'est pas pour autant dégénérée, vu que son déterminant dans la base canonique vaut -1.

Proposition 1.1.41. Toute forme quadratique définie est non dégénérée.

D'ici la fin de cette sous-section, nous supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1.1.42. On dit qu'une forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$ est *positive* (resp. *négative*) si, pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$).

Exemple 1.1.43. La norme $\| \, . \, \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme définie positive, tandis que la forme quadratique étudiée dans l'exemple 1.1.40 n'est même pas positive. La forme quadratique, sur $\mathbb{R}^2$, $q : x \mapsto x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$ est, quant à elle, positive, mais non définie.

Théorème 1.1.44 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$ positive. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\varphi_q(x, y)|^2 \leq q(x)q(y).$$

De plus, si q est définie positive, alors il y a égalité ssi x et y sont colinéaires.

Démonstration. On fixe $x, y \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $q(x + ty) = q(x) + 2t\varphi(x, y) + t^2q(y) \geq 0$. Puisqu'il s'agit d'un trinôme du second degré en t, on a donc $4|\varphi(x, y)|^2 - 4q(x)q(y) \leq 0$.

En cas d'égalité, le discriminant est nul et il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(x + ty) = 0$. mais si q est définie, alors $x + ty = 0$. □

Corollaire 1.1.45 (Inégalité de Minkowski)**.** Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$ positive. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

De plus, si q est féinie positive, alors il y a égalité ssi il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Démonstration. On fixe $x, y \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$q(x + y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y) \leq q(x) + 2\sqrt{q(x)q(y)} + q(y) = \left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2.$$

De plus, s'il y a égalité et que q est définie positive, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x + ty = 0$, c'est-à-dire $x = -ty$. Mais alors $-tq(y) = \varphi(x, y) = \sqrt{q(x)q(y)} \geq 0$. Donc ou bien $y = 0$ et alors $y = \lambda x$ avec $\lambda = 0$, ou bien $q(y) > 0$ et alors $-t \geq 0$, ce qui donne $x = \lambda y$ avec $\lambda = -t \geq 0$. □

1.1.4 Signature

Dans cette sous-section, on suppose que E est dimension finie n.

Théorème 1.1.46 (Algorithme de Gauss)**.** Pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe $\ell_1, \ldots, \ell_k \in E^*$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}^*$ tels que $q = \sum_i \alpha_i \ell_i^2$. On a alors, pour tous $x, y \in E$, $\varphi_q(x, y) = \sum_i \alpha_i \ell_i(x) \ell_i(y)$.

Démonstration. On fixe une base et on travaille récursivement sur le nombre k de variable x_i apparaissant dans l'écriture de q dans la base donnée.

Si $k = 0$, c'est que $q \equiv 0$ et le résultat est clair.

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à k et supposons que q fait intervenir $k + 1$ variables. Quitte à réordonner la base, on peut supposer qu'il s'agit des variables $x_1, \ldots, x_{k+1}$.
Si il existe i tel que αx_i^2 apparait avec $\alpha \neq 0$, alors quitte à réordonner la base, on peut supposer qu'il s'agit de x_{k+1} et on a

$$q(x) = \alpha x_{k+1}^2 + f(x_1, \ldots, x_k) x_{k+1} + r(x_1, \ldots, x_n)$$

avec $f \in E^*$ et $r \in \mathrm{Quad}(E)$, que l'on peut réécrire comme

$$q(x) = \alpha \left(x_{k+1} + \frac{1}{2\alpha} f(x_1, \ldots, x_k) \right)^2 - \frac{1}{4\alpha^2} f^2(x_1, \ldots, x_k) + r(x_1, \ldots, x_k).$$

Par hypothèse de récurrence, $-\frac{1}{4\alpha^2} f^2(x_1, \ldots, x_k) + r(x_1, \ldots, x_k)$ s'écrit comme combinaison de formes linéaires indépendantes au carré ne faisant pas intervenir x_{k+1}, celles-ce sont donc linéairement indépendantes avec $x_{k+1} + \frac{1}{2\alpha} f(x_1, \ldots, x_k)$.
Si aucun terme en x_i^2 n'apparait, alors il apparait nécessairement un terme en $\alpha x_i x_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$. Quitte à réordonner la base, on peut supposer qu'il s'agit de $x_k x_{k+1}$. On écrit alors

$$q(x) = \alpha x_k x_{k+1} + f(x_1, \ldots, x_{k-1}) x_k + g(x_1, \ldots, x_{k-1}) x_{k+1} + r(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

avec $f, g \in E^*$ et $r \in \mathrm{Quad}(E)$, que l'on peut réécrire comme

$$\begin{aligned} q(x) \quad = \quad & \frac{\alpha}{4} \left(x_k + x_{k+1} + \frac{1}{\alpha} (g(x_1, \ldots, x_{k-1}) + f(x_1, \ldots, x_{k-1})) \right)^2 - \frac{\alpha}{4} \left(x_k - x_{k+1} + \frac{1}{\alpha} (g(x_1, \ldots, x_{k-1}) - f(x_1, \ldots, x_{k-1})) \right)^2 \\ & - \frac{1}{\alpha} f(x_1, \ldots, x_{k-1}) g(x_1, \ldots, x_{k-1}) + r(x_1, \ldots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Là encore, on conclut par récurrence.

L'affirmation sur la forme polaire associée découle de son unicité. □

Exemple 1.1.47. La norme $\| \, . \, \|_2$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ s'écrit $\sum (e_i^*)^2$.

Corollaire 1.1.48. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On commence par écrire tous les α_i comme des β_i^2, puis on les rentre dans dans les formes linéaires de sorte à obtenir $\varphi_q(x, y) = \sum_i \ell_i(x)\ell_i(y)$. On complète alors les ℓ_i en une base de E^* et on considère sa base duale $\ell_1^*, \ldots, \ell_n^*$ pour $(E^*)^*$ que l'on identifie canoniquement à E via l'isomorphisme ψ de la proposition 1.1.21. Cela donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\ell_i(e_j) = (\psi(e_j))(\ell_i) = \ell_j^*(\ell_i) = \delta_{ij}$. □

Corollaire 1.1.49. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On procède comme dans le cas complexe, à la différence près que les coefficients $\alpha_i < 0$ sont réécrit sous la forme $-\beta_i^2$. Cela produira, au final, un certain nombre de -1 sur la diagonale. □

Corollaire 1.1.50. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, avec $q = p^s$ impair, et si $\alpha_0 \in \mathbb{K}^*$ est un élément fixé qui ne soit pas un carré dans $\mathbb{K}$, alors pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \{0, 1, \alpha_0\}$.

Démonstration. On commence par remarquer que le noyau du morphisme de groupe

$$\mathrm{Sq}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^* & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est réduit à ± 1 car ce sont les racines du polynôme $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$, et donc que son image contient $\frac{q-1}{2}$ éléments. Il y a donc $\frac{q-1}{2}$ éléments de $\mathbb{F}_q^*$ qui ne sont pas des carrés, et par un argument de cardinalité, ils s'écrivent tous comme $\alpha_0 x$ avec $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Sq})$.

On procède alors comme dans le cas réel, en remplaçant -1 par α_0. On conclut en remarquant que les α_0 sur la diagonale peuvent être remplacés par paires par des 1. En effet, a^2 prenant $\frac{q+1}{2}$ valeurs et $\alpha_0 - b^2$ aussi, ils ont nécessairement au moins une valeur en commun, et donc l'équation $a^2 + b^2 = \alpha_0$ admet toujours une solution. On peut alors appliquer le changement de variables $\alpha_0^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ sur le sous-espace engendré par les deux vecteurs de la base correspondant aux deux lignes contenant α_0. □

Remarque 1.1.51. Pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{2^s}$, tous les éléments sont des carrés car on a $x^2 = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_{2^s}$. Notons au passage que les formes quadratiques sont donc linéaires, ce qui explique le caractère exceptionnel de la caractéristique 2.

Remarque 1.1.52. Ces diagonlisations ne sont pas entièrement constructive car elle nécessite d'inverser ψ. Parfois, cela peut se faire "à la main". Autrement, pour tout forme linéaire ℓ_i, il faut déterminer l'intersection des noyaux de toutes les autres ℓ_j, puis y trouver un élément qui ne soit pas dans le noyau de ℓ_i. Cela est toujours possible car les formes sont linéairement indépendantes.
Dans le cas réel, nous verrons plus tard le principe d'orthonormalisation de Gram–Schmidt qui donne un autre algorithme plus efficace.

On ne considère maintenant plus que le cas réel.

Définition 1.1.53. Pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, on appelle *signature de q*, noté $\mathrm{sign}(q)$ le couple d'entiers (σ_p, σ_n) défini par

$$\sigma_p := \max_{\substack{F\subset E \text{ sev} \\ q_{|F} \text{ déf. pos.}}} \Big(\dim(F)\Big) \qquad\qquad \sigma_n := \max_{\substack{F\subset E \text{ sev} \\ q_{|F} \text{ déf. nég..}}} \Big(\dim(F)\Big).$$

Remarque 1.1.54. Le max porte sur les dimensions et non sur les espaces car, en général, il n'existe pas d'espace maximal. Considérons en effet $q \in \mathrm{Quad}(\mathbb{R}^2)$ définie par $q(x) = x_1^2 - x_2^2$. Elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2$ car $q(1,1) = 0$, et restreinte à la droite $\mathbb{R}.(1,\lambda)$, elle définie positive si $|\lambda| < 1$ et définie négative si $|\lambda| > 1$.

Proposition 1.1.55. Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$ de signature $\mathrm{sign}(q) = (\sigma_p, \sigma_n)$. Alors σ_p est égal au nombre de 1 dans la diagonalisation du corollaire 1.1.49, tandis que σ_n correspond au nombre de -1.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation pour q obtenue par l'algorithme de Gauss telle que $q(e_i) = 1$ pour $i \in [\![1, i_1]\!]$, $q(e_i) = -1$ pour $i \in [\![i_1 + 1, i_2]\!]$ et $q(e_i) = 0$ pour $[\![i_2 + 1, n]\!]$. On note $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i_1})$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(e_{i_1} + 1, \dots, e_{i_n})$. Il est clair que $q_{|F_1}$ est définie positive tandis que $q_{|F_2}$ est négative. Notamment, $\sigma_p \geq i_1$. On fixe $F \subset E$ tel que $\dim(F) = \sigma_p$ et $q_{|F}$ soit définie positive. Si $\sigma_p > i_1$, alors on aurait $\dim(F) + \dim(F_2) > n$ et il existerait un vecteur $x \in F \cap F_2 \setminus \{0\}$ tel que $q(x) > 0$ et $q(x) \leq 0$, ce qui est absurde. On a donc $\sigma_p = i_1$.

Pour σ_n, il suffit de considérer $-q$. □

Exemple 1.1.56. En reprenant les trois formes quadratiques de l'exemple 1.1.43, on trouve comme signature $(n, 0)$, $(2, 1)$ et $(1, 0)$.

Corollaire 1.1.57. Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$ de signature $\mathrm{sign}(q) = (\sigma_p, \sigma_n)$.

1. On a $\sigma_p + \sigma_n = \mathrm{rg}(q) \leq n$.
2. La forme q est non dégénérée ssi $\sigma_p + \sigma_n = n$.
3. La forme q est définie ssi $\sigma_p = n$ ou $\sigma_n = n$.
4. La forme q est positive ssi $\sigma_n = 0$, et elle est négative ssi $\sigma_p = 0$.

Corollaire 1.1.58. Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$, alors

1. si q est définie, alors elle est définie positive ou définie négative ;
2. si q est non dégénérée positive (resp. négative), alors elle est définie positive (resp. négative).

Théorème 1.1.59 (d'inertie de Sylvester)**.**

1. Deux formes quadratiques réelles sont équivalentes ssi elles ont la même signature.
2. Deux matrices réelles symétriques sont congruentes ssi elles ont même signature.

1.1.5 Diagonalisation simultanée

Définition 1.1.60. Soit $q \in \mathrm{Quad}(E)$. On dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est *orthogonale pour q* si $\varphi_q(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. On dit qu'elle est *orthonormé pour q* si, de plus, elle vérifie $q(e_i) = 1$ pour tout i.

Remarque 1.1.61. Une base $\mathcal{B}$ est donc orthonogonale pour une forme quadratique q ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale, et elle est orthenormée ssi c'est la matrice identité. Le corollaire 1.1.49 montre donc qu'il existe toujours une base orthogonale pour une forme quadratique donnée, mais qu'il n'existe une base orthonormée que si la forme est définie positive.

Théorème 1.1.62. Soit $q_0, q \in \mathrm{Quad}(E)$ telles que q_0 soit définie positive. Il existe une base simultanément orthonormée pour q_0 et orthogonale pour q.

Corollaire 1.1.63. Soit deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que M soit définie positive, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^tMP = \mathrm{Id}$ et P^tNP soit diagonale.

Avant de démontrer le théorème 1.1.62, commençons par un petit lemme.

Lemme 1.1.64. Tout forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$ est différentiable avec $Dq_{x_0}(u) = 2\varphi_q(X_0, u)$.

Démonstration. Cela provient de la relation $q(x_0 + u) - q(x_0) = 2\varphi(x_0, u) + q(u)$. □

Démonstration du théorème 1.1.62. Soit $q_0, q \in \mathrm{Quad}(E)$ avec q_0 définie positive. Pour montrer le résultat, on procède par récurrence sur la dimension n.

Si $n = 1$, alors le résultat est clair.

Si $n > 1$, on considère l'application $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{q(x)}{q_0(x)}$. Par quotient d'applications différentiables, elle est différentiable (donc continue) avec $Df_{x_0}(u) = \frac{2q_0(x_0)\varphi_q(x_0,u) - 2q(x_0)\varphi_{q_0}(x_0,u)}{(q_0(x_0))^2}$. Notamment, si Df_{x_0} s'annule dans une direction u, alors $q_0(x_0)\varphi_q(x_0, u) = q(x_0)\varphi_{q_0}(x_0, u)$.
On considère maintenant, l'ensemble $S := \{x \in E \mid q_0(x) = 1\}$. Cet ensemble est compacte car, dans une base orthonormée, ce sont les éléments dont la somme des carrés des coordonnées vaut 1, il s'agit donc d'un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. Par continuité, l'application $f_{|S}$ admet donc un maximum sur S, que l'on note x_0. Cela signifie que Df_{x_0} s'annule dans toutes les directions tangentes à S, c'est-à-dire les directions qui annulent $D(q_0)_{x_0}$, à savoir $F = \{u \in E \mid \varphi_{q_0}(x_0, u) = 0\}$. Mais d'après ce qui précède, on a alors aussi $\varphi_q(x_0, u) = 0$.
Par ailleurs, on a $E = \mathbb{R}.x_0 \oplus F$. En effet, $x_0 \notin F$ car $\varphi_{q_0}(x_0, x_0) = q(x_0) = 1 \neq 0$, et $\dim(F) = n - 1$ car F est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une base de diagonalisation simultanée de q_0 et q sur F. En lui adjoignant x_0, on obtient la base voulue. □

1.2 Géométrie vectorielle euclidienne

1.2.1 Espaces vectoriels euclidiens

Définition 1.2.1. On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E toute forme bilinéaire symétrique définie positive. On appelle espace (vectoriel) euclidien tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemples 1.2.2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ muni de l'application $(x, y) \mapsto \sum_i x_i y_i$.

2. L'ensemble des applications continues sur $[0, 1]$ muni de l'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 K(t)f(t)g(t)dt$ où $K : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement positive.

Proposition 1.2.3. La racine carrée de la forme quadratique associée à un produit scalaire induit une structure d'espace vectoriel normé sur tout espace vectoriel euclidien, laquelle induit une structure d'espace métrique via l'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$.
Réciproquement, tout espace vectoriel normé est muni d'une structure euclidienne via la forme polaire associée à la norme.

Proposition 1.2.4. Tout espace vectoriel euclidien est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ munie de la norme $\| \, . \, \|_2$.

Dans tout ce qui suit, (E, φ) est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.2 Orthogonalité

Définition 1.2.5. Pour tout $F \subset E$ (pas nécessairement vectoriel), on appelle *espace orthogonal* (pour φ), noté $F^\perp$ (voire $F^{\perp_\varphi}$ si nécessaire), l'espace $\{x \in E \mid \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\}$.

Remarque 1.2.6. La notion d'espace orthogonal peut se définir pour n'importe quel forme bilinéaire φ. On a alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = E^\perp$, ce qui donne un contre-exemple à beaucoup de propriété qui suivent.

Proposition 1.2.7. Pour tout $F \subset E$, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel, et si F est lui-même un sous-espace vectoriel de dimension k, alors $\dim(F^\perp) = n - k$.

Démonstration. Pour montrer cela, on considère une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de F orthonormé pour φ et on considère l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & \big(\varphi(x, e_1), \ldots, \varphi(x, e_k)\big). \end{array}$$

□

Proposition 1.2.8.

1. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, alors
   (a) $(F^\perp)^\perp = F$;
   (b) $E = F \oplus F^\perp$.
2. Soit $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels, alors
   (a) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;
   (b) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
   (c) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Démonstration. Seule l'inclusion $(F \cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp$ n'est pas immédiate. Mais on a $\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp = F \cap G$ et donc $F^\perp \cap G^\perp = (F \cap G)^\perp$. □

Remarque 1.2.9. La formule $E = F \oplus F^\perp$ indique notamment que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{f^\perp}$.

Définition 1.2.10. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. En utilisant les notations de la remarque ci-dessus, on a appelle *projection orthogonale sur* F l'application

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}.$$

Proposition 1.2.11. Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x, e_i)e_i.$$

Démonstration. On a clairement $\sum_{i=1}^n \varphi(x, e_i)e_i \in F$ et un calcul direct montre que $x - \sum_{i=1}^n \varphi(x, e_i)e_i \in F^\perp$. □

Corollaire 1.2.12 (Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** Soit $\mathcal{B}$ une base queconque de E, il existe une matrice triangulaire supérieure qui envoit $\mathcal{B}$ sur une base orthonormée.

Démonstration. On définit la nouvelle base $(f_1, \dots, f_n)$ récursivement en posant $f_1 := \frac{1}{\varphi(e_1,e_2)}e_1$ puis, pour $k \in \{2, \dots, n\}$, $g_k := e_k - p_{\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})}(e_k) = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(e_k, f_i)f_i$ et $f_k := \frac{1}{\varphi(g_k,g_k)}g_k$. □

Remarque 1.2.13. On peut modifier cet algorithme afin d'obtenir une base orthogonale pour une forme bilinéaire non définie positive. Pour cela, à la $k^{\text{ième}}$ étape, on soustrait au $n - k$ derniers vecteurs leur projection, calculée via la formule explicite, sur l'espace engendré par les $k - 1$ premiers vecteurs.

1.2.3 Isométries vectorielles

On considère ici que tout espace vectoriel est muni d'une structure euclidienne.

Définition 1.2.14. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une *isométrie vectorielle* si elle préserve les produits scalaires, c'est-à-dire si, pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi_F(f(x), f(y)) = \varphi_E(x, y)$. On note $\mathrm{Isom}_{\mathrm{vec}}(E, \varphi)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E dans lui-même.

Proposition 1.2.15. Toute isométrie vectorielle est linéaire.

Démonstration. Soit f une isométrie vectorielle. On fixe $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et on considère

$$\begin{aligned}
||f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)||_F^2 &= \varphi_F\big(f(x+\lambda y), f(x+\lambda y)\big) + \varphi_F\big(f(x), f(x)\big) + \lambda^2\varphi_F\big(f(y), f(y)\big) \\
&\qquad -2\varphi_F\big(f(x+\lambda y), f(x)\big) - 2\lambda\varphi_F\big(f(x+\lambda y), f(y)\big) + 2\lambda\varphi_F\big(f(x), f(y)\big) \\
&= \varphi_E(x+\lambda y, x+\lambda y) + \varphi_E(x, x) + \lambda^2\varphi_E(y, y) - 2\varphi_E(x+\lambda y, x) - 2\lambda\varphi_E(x+\lambda y, y) + 2\lambda\varphi_E(x, y) \\
&= ||x + \lambda y - x - \lambda y||_E^2 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

On a donc $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(x)$. □

Proposition 1.2.16.

1. Une isométrie est bijective.
2. Le déterminant d'une isométrie vaut ± 1.
3. Un endomorphisme est une isométrie ssi il préserve la norme associée à φ, ou encore ssi il préserve la métrique associée à φ et fixe 0.
4. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par $f \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{vec}}(E, \varphi)$, alors $F^\perp$ l'est aussi.

Exemple 1.2.17. Les projections orthogonales ne sont pas des isométries, mais la réflexion $r_F := 2p_F - \mathrm{Id}$ par rapport au sous-espace vectoriel $F \subset E$, autrement décrit comme $\mathrm{Id}_F \oplus (-\mathrm{Id}_{F^\perp})$, en est une.

Proposition 1.2.18. Toute isométrie $f \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{vec}}(E, \varphi)$ s'écrit comme composé d'au plus n réflexions par rapport à des hyperplans.

Définition 1.2.19. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si elle vérifie $M^t M = \mathrm{Id}$. On note $\mathrm{O}(n)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthonales. On note $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{Ker}(\det_{|\mathrm{O}(n)})$.

Proposition 1.2.20. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée pour φ. Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est une isométrie ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O(n)$.

Proposition 1.2.21. Pour tout $M \in \mathrm{SO}(2)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.22. On appelle matrice de rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, notée R_θ, la matrice écrite ci-dessus.

Théorème 1.2.23 (Classification des isométries vectorielles)**.** Pour tout $f \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{vec}}(E, \varphi)$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix}$$

pour certains $\theta_1, \cdots, \theta_m \in [0, 2\pi[$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est clair.

Si $n > 1$, il y a deux cas. Si f admet une valeur propre λ réelle, on a $\lambda = \pm 1$ et, en considèrant x_0 un vecteur propre associé à λ, on peut travailler récursivement et indépendemment sur $\mathbb{R}.x_0$ et $(\mathbb{R}.x_0)^\perp$.
Si f n'admet pas de valeur propre réelle, alors son polynôme caractéristique ξ s'écrit $\xi_1 \cdots \xi_k$ avec ξ_i polynôme irréductible de degré 2. D'après le théorème de Caylay–Hamilton, on a alors $\xi(f) = \xi_1(f) \circ \cdots \circ \xi_k(f) = 0$, et donc l'un au moins des $\xi_i(f)$ n'est pas injectif. On fixe un tel indice i_0 et un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que $\xi_{i_0}(f)(x_0) = 0$. Le vecteur $f^2(x_0)$ s'écrit alors comme combinaison linéaire de x_0 et $f(x_0)$ et l'espace $F = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0))$ est stable par f. La restriction $f_{|F}$ n'a pas de valeur propre réelle, elle en a donc deux complexes conjuguées $\lambda, \overline{\lambda}$ et on a $\det(f) = \lambda\overline{\lambda} > 0$, et donc $\det(f) = 1$. Au final, dans n'importe quelle base orthonormée $\mathcal{B}$ pour F, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{|F}) \in \mathrm{SO}(2)$. On conclut d'après la proposition 1.2.21 et par hypothèse de récurrence appliquée à $f_{|F^\perp}$. □

2 Géométrie affine

2.1 Espaces

2.1.1 Espaces et sous-espaces affines

Définition 2.1.1. On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une *structure affine* si il est muni d'une action libre et transitive par un espace vectoriel E. On dit alors que $\mathcal{E}$ est *dirigé* par E ou que E est *l'espace directeur* de $\mathcal{E}$.
Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, alors on dit que $\mathcal{E}$ est également de dimension finie, avec $\dim(\mathcal{E}) = n$. Si $n = 1$, on parle de droite ; si $n = 2$, on parle de plan.

Notation 2.1.2. On note par $x + \overrightarrow{u}$ l'image de $x \in \mathcal{E}$ par l'action du vecteur $\overrightarrow{u} \in E$, et par $\overrightarrow{xy} \in E$, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, l'unique vecteur tel que $x + \overrightarrow{xy} = y$. Enfin, pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, on note $\xi_{x_0} : E \to \mathcal{E}$ la bijection définie par action de E sur x_0 ; on a donc $\xi_{x_0}(\overrightarrow{u}) = x_0 + \overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et $\xi_{x_0}^{-1}(y) = \overrightarrow{x_0y}$ pour tout $y \in \mathcal{E}$.

Exemples 2.1.3.

1. Un espace vectoriel est canoniquement muni d'une structure affine dirigé par lui-même.
2. Solutions d'une EDO linéaire non homogène.

Notation 2.1.4. Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire, toute majuscule cursive $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, etc dénotera un espace affine dirigé par un espace que l'on notera par la même lettre écrite en majuscule romane E, F, etc.

Définition 2.1.5. On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ si il existe $x \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ sous-espace vectoriel tels que $\mathcal{F} = x + F := \{x + \overrightarrow{u} | \overrightarrow{u} \in F\}$.

Proposition 2.1.6. Tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par $F = \{\overrightarrow{xy} | x, y \in \mathcal{F}\}$.

Corollaire 2.1.7. Un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est décrit par n'importe lequel de ses points et son espace directeur.

Proposition 2.1.8. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace non vide de $\mathcal{E}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine ;

ii. pour tout $x_0 \in \mathcal{F}$, $\{\overrightarrow{x_0y} \big| y \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;

iii. il existe $x_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\{\overrightarrow{x_0y} \big| y \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 2.1.9. Il est important de considérer $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ avec x_0 fixé et non $\{\overrightarrow{xy} | x, y \in \mathcal{F}\}$ car $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace affine, et pourtant $\{x - y | x, y \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.10. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines.On dit $\mathcal{F}$ est *faiblement parallèle* à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *parallèles* s'ils sont chacun faiblement parallèles à l'autre, c'est-à-dire si $F = G$.

2.1.2 Opérations

Comme pour de nombreuses structures algébriques, la structure affine se comporte bien vis-à-vis de l'intersection, mais moins bien vis-à-vis de l'union. On pallie cette dernière faiblesse avec la notion d'espace engendré.

Proposition 2.1.11. Pour toute famille $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Définition 2.1.12. Pour tout sous-ensemble $X \subset \mathcal{E}$ non vide, on appelle *sous-espace affine engendré par X* le sous-espace affine

$$\mathrm{Aff}(X) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{E} \text{ s.e.a} \\ X \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}.$$

Il s'agit du plus petit sous-espace affine contenant X.

Exemples 2.1.13.

- Les sous-espaces affines engendrés par un, deux, trois points.
- Les sous-espaces affines engendrés par les réunions de sous-espaces affines :
  - deux droites dans le plan ;

- deux droites dans l'espace ;
- une droite et un plan dans l'espace.

Proposition 2.1.14. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H} := \mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Alors

1. $\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{G}, H = F + G + k.\overrightarrow{xy}$;
2. $(H = F + G) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{G}, \overrightarrow{xy} \in F + G) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset)$.

Démonstration. L'affirmation $H = F + G \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ est la plus délicate. Pour la montrer, fixons $x \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ et $y \in \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. On a alors $\overrightarrow{xy} \in H$ et donc, il existe $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On pose alors $z := x + \overrightarrow{u} = y + \overrightarrow{yx} + \overrightarrow{u} = y - \overrightarrow{v}$. on a bien $z \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. □

Corollaire 2.1.15. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont deux sous-espaces affines tels que $F + G = E$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Corollaire 2.1.16. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H} := \mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont de dimensions finies, alors

1. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$;
2. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\dim(\mathcal{H}) = 1 + \dim(F + G)$.

2.1.3 Espaces affines euclidiens

La structure affine est le cadre approprié pour parler de parallélisme ou d'alignement de points. Il ne contient néamoins aucune notion de distance ni d'orthogonalité. Sur $\mathbb{R}$, le cadre euclidien permet d'instaurer ces notions.

Définition 2.1.17. On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure *affine euclidienne* s'il est muni d'une structure affine dirigé par un espace vectoriel E lui-meme muni d'une structure euclidienne, c'est-à-dire de dimension finie et muni d'une forme quadratique définie positive q.

Proposition 2.1.18. Tout espace affine euclidien est naturellement muni d'une structure métrique par l'application

$$d : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{q(\overrightarrow{xy})} \end{array} .$$

Définition 2.1.19. On dit que deux sous-espace affine $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ d'un espace affine euclidien sont *orthogonaux* si $F^\perp \subset G$, ou de manière équivalent $G^\perp \subset F$.

2.2 Applications

2.2.1 Applications affines

Définition 2.2.1. On dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une *application affine* si il existe $\overrightarrow{f} : E \to F$ linéaire telle que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \times E \arrow[r] \arrow[d, "f \times \overrightarrow{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{E} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{F} \times F \arrow[r] & \mathcal{F} \end{tikzcd} .$$

Proposition–Définition 2.2.2. Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine, alors l'application $\overrightarrow{f} : E \to F$ faisant commuter le diagramme ci-dessus est unique, décrite pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$ par $\overrightarrow{f} = \xi_{f(x_0)}^{-1} \circ f \circ \xi_{x_0}$. On l'appelle *linéarisé de f*.

Démonstration. On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, la valeur de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ est imposé par $f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x_0+\overrightarrow{u})} = f(x_0+\overrightarrow{u}) = f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. □

Proposition 2.2.3. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est affine ;

ii. pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, l'application $\xi_{f(x_0)}^{-1} \circ f \circ \xi_{x_0}$ est linéaire ;

iii. il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que l'application $\xi_{f(x_0)}^{-1} \circ f \circ \xi_{x_0}$ soit linéaire.

Démonstration. Seul iii. ⇒ i. n'est pas immédiat. Il faut vérifier que $f(x+\overrightarrow{u}) = f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$. Or, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
f(x+\overrightarrow{u}) &= f(x_0 + \overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{u}) = f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{u})} \\
&= f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{u}) = f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0x}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \\
&= f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{x_0x})} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(x_0 + \overrightarrow{x_0x}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \\
&= f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}).
\end{aligned}$$

□

Exemples 2.2.4.

- L'identité est affine.
- Toute application constante est affine.
- Les applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ du type $(x \mapsto ax+b)$ avec $a, b \in \mathbb{K}$ sont affines.
- Les translations $t_{\overrightarrow{u}}$ par un élément $\overrightarrow{u} \in E$ sont affines.
- Les projection de $E \oplus F$ sur E selon F sont affines. Plus généralement, pour tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et tout sous-espace vectoriel $G \subset E$ tels que $F \oplus G = E$, il existe une unique application affine $p_{\mathcal{F},G} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\mathrm{Im}(p_{\mathcal{F},G}) = \mathcal{F}$, $\mathrm{Im}(\overrightarrow{p}_{\mathcal{F},G} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}) = G$ et $p_{\mathcal{F},G}^2 = p_{\mathcal{F},G}$ (voir TD2) ; on parle de la *projection sur $\mathcal{F}$ selon G*.
- Avec les notations du point précédent, l'application $s_{\mathcal{F},G} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $s_{\mathcal{F},G}(x) = x + 2\overrightarrow{xp_{\mathcal{F},G}(x)}$ est affine ; on parle de la *symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ selon G*.
- L'application carré n'est pas affine si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.

Proposition 2.2.5.

1. La composé de deux applications affines est affine, de linéarisé la composé des linéarisés.
2. Une application affine est injective ssi sa linéarisé l'est.
3. Une application affine est surjective ssi sa linéarisé l'est.
4. La réciproque d'une bijection affine est affine, de linéarisé l'inverse de la linéarisé.

Notation 2.2.6. On note $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathrm{MA}(\mathcal{E})$) le groupe des bijections affines (resp. monoïde des applications affines) de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Proposition 2.2.7. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Alors

1. l'image par f d'un sous-espace affine est un sous-espace affine ;
2. l'image réciproque par f d'un sous-espace affine est soit vide, soit un sous-espace affine.

Corollaire 2.2.8. Une application affine préserve l'alignement des points.

Remarque 2.2.9. Bien que fausse en toute généralité, la réciproque est vraie sur $\mathbb{R}$ en dimension au moins 2.

On s'intéresse maintenant aux points fixes des applications affines, car ceux-ci vont jouer un rôle crucial dans leur étude.

Proposition 2.2.10. Pour tout $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ de f est soit vide, soit un sous-espace affine.

Démonstration. Considérons l'application $\psi : \mathcal{E} \to E$ définie, pour tout $x \in \mathcal{E}$, par $\psi(x) = \overrightarrow{xf(x)}$. C'est une application affine avec $\overrightarrow{\psi} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$ car, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a

$$\psi(x + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{(x + \overrightarrow{u})\big(f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\big)} = \overrightarrow{(x + \overrightarrow{u})x} + \overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{f(x)\big(f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\big)} = \psi(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}.$$

On conclut en remarquant que $\mathrm{Fix}(f) = \psi^{-1}\big(\{0\}\big)$. □

Proposition 2.2.11. Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, l'application qui envoie une application affine sur son linéarisé induit un isomorphisme entre $\mathrm{MA}_{x_0}(\mathcal{E}) := \{f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E}) \,\big|\, f(x_0) = x_0\}$ et $\mathrm{End}(E)$.

Proposition 2.2.12. Soit $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$. Pour chaque $x_0 \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\overrightarrow{u} \in E$ et $f_{x_0} \in \mathrm{MA}_{x_0}(\mathcal{E})$ tels que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ f_{x_0}$. On a alors $\overrightarrow{f}_{x_0} = \overrightarrow{f}$.

Démonstration. Supposons qu'une telle décomposition existe, on a alors $x_0 + \overrightarrow{x_0 f(x_0)} = f(x_0) = (t_{\overrightarrow{u}} \circ f_{x_0})(x_0) = t_{\overrightarrow{u}}(x_0) = x_0 + \overrightarrow{u}$, ce qui implique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)}$ et $f_{x_0} = t_{\overrightarrow{f(x_0)x_0}} \circ f$. Rétrospectivement, on vérifie que ces éléments satisfont les conditions voulues. □

Corollaire 2.2.13. Le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct $E \rtimes \mathcal{GL}(E)$ où $\mathcal{GL}(E)$ agit sur E par évaluation.

Démonstration. Un point $x_0 \in \mathcal{E}$ étant fixé, et en reprenant les notations de la proposition 2.2.12, cela provient de l'égalité $g \circ f = (t_{u_g + \overrightarrow{g}(u_f)}) \circ (g_{x_0} \circ f_{x_0})$. □

2.2.2 Isométries affines

On considère ici que tous les espaces affines sont de dimension finie et munis d'une structure euclidienne.

Définition 2.2.14. On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une *isométrie* si elle préserve les distances.

Proposition 2.2.15. Toute isométrie est une injection affine.

Notation 2.2.16. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{GA}(\mathcal{E})$, le sous-groupe des isométries de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Remarque 2.2.17. Si $\mathcal{E}$ est lui-même un espace vectoriel, il ne faut pas confondre $\mathrm{Isom}_{\mathrm{vec}}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$. L'application de translation par un vecteur constant non nul est en effet dans le second sans être dans le premier.

Définition 2.2.18. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, on appelle *symétrie orthogonale par rapport à* $\mathcal{F}$ la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ selon $F^\perp$.

Proposition 2.2.19. Toute symétrie orthogonale est une isométrie, et toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus $n+1$ symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, où n est la dimension de $\mathcal{E}$.

Théorème 2.2.20. Pour tout $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, il existe un unique couple $(\overrightarrow{u}, g) \in E \times \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ tel que

- g possède au moins un point fixe ;
- $t_{\overrightarrow{u}}$ et g commutent ;
- $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$.

On a alors $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$.

La démonstration de ce théorème s'appuit sur deux lemmes :

Lemme 2.2.21. Soit $\overrightarrow{f} \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{vec}}(E)$, $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})^\perp = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$.

Démonstration. Pour des raisons de dimension, il suffit de vérifier que l'on a une inclusion. Or pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$, on a $\overrightarrow{f}(x) = x$ et donc, pour tout $y \in E$,

$$\varphi(f(y) - y, x) = \varphi(f(y), x) - \varphi(y, x) = \varphi(f(y), f(x)) - \varphi(y, x) = 0.$$

□

Lemme 2.2.22. Soit $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ telle que $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}) = E$, alors la conclusion du théorème s'applique avec $g \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$.

Démonstration. Supposons qu'un tel couple $(\overrightarrow{u}, g)$ existe et fixons $x_0 \in \mathrm{Fix}(g)$. On a alors $f(x_0) = x_0 + \overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)} \in \mathrm{Im}(\psi)$ où $\psi : \mathcal{E} \to E$ est définie par $\psi(x) = \overrightarrow{x f(x)}$. Notons que ψ est affine de linéarisé $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{Id}$ et donc que $\mathrm{Im}(\psi)$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{f})$. Par ailleurs, g et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent donc $x_0 + \overrightarrow{u} = g(x_0 + \overrightarrow{u}) = x_0 + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = x_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$, donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$ et, en vertu du corollaire 2.1.15 et de la proposition 2.1.11, $\overrightarrow{u}$ est donc l'unique élément dans $\mathrm{Im}(\psi) \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}$.

Rétrospectivement, on pose donc $\overrightarrow{u}$ l'unique élément dans $\mathrm{Im}(\psi) \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}$ et $g = f \circ t_{-\overrightarrow{u}}$. Comme $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}$, les applications g et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent bien. Il suffit donc de montrer que g admet un point fixe. Pour cela, on considère un antécédent $x_0 \in \mathcal{E}$ de $\overrightarrow{u}$ par ψ. On a alors $g(x_0) = f(x_0 - \overrightarrow{u}) = f(x_0) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(x_0) - \overrightarrow{u} = f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)x_0} = x_0$. □

Le théorème 2.2.20 est un outil puissant pour classifier les isométries.

Proposition 2.2.23. Si $n = 1$, on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \{translations\} \cup \{\text{réflexion par rapport à un point}\}$.

Définition 2.2.24. Si $n = 2$, on appelle

- rotation autour de $a \in \mathcal{E}$ toute toute isométrie affine f telle que $f(a + u) = a + \overrightarrow{f}(u)$ avec $\overrightarrow{f}$ une rotation vectorielle distincte de l'identité ;
- symétrie glissée toute réflexion composée avec une translation parallèle à l'axe de la réflexion.

Proposition 2.2.25. Si $n = 2$, on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{rotation}\} \cup \{\text{symétrie glissée}\}$.

Définition 2.2.26. Si $n = 3$, on appelle

- rotation autour d'axe $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ toute toute isométrie affine f fixant $\mathcal{D}$ et telle que $\overrightarrow{f}_{|D^\perp}$ est une rotation vectorielle distincte de l'identité ;
- vissage toute composé d'une rotation avec une translation parallèle à l'axe de la rotation ;
- symétrie glissée toute réflexion composée avec une translation parallèle à l'axe de la réflexion ;
- anti-rotation toute composé d'une rotation avec une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Proposition 2.2.27. Si $n = 3$, on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{vissage}\} \cup \{\text{symétrie glissée}\} \cup \{\text{anti-rotations}\}$.

2.3 Bases affines

2.3.1 Barycentres

Proposition 2.3.1. Pour tout $\mathfrak{S} = ((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k)) \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ l'application $\psi_{\mathfrak{S}} : \mathcal{E} \to E$ définie par $\psi_{\mathfrak{S}}(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{xx_i}$ est constante si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ et possède un unique antécédent à $\overrightarrow{0}$ sinon.

Démonstration. On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$. Il suffit alors d'écrire que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\psi_{\mathfrak{S}}(x) = \psi_{\mathfrak{S}}(x_0) + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \overrightarrow{xx_0}$. □

Définition 2.3.2. Pour tout système de points pondérés $\mathfrak{S} = ((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k)) \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^k$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, on appelle *barycentre de* $\mathfrak{S}$ l'unique antécédent de $\overrightarrow{0}$ par $\psi_{\mathfrak{S}}$.

Notation 2.3.3. Avec les hypothèses de la définition précédente, on note $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ le barycentre du $\mathfrak{S}$.

Proposition 2.3.4. Pour tout $((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k)) \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^k$ tel que $\sum_{i=1}^k \neq 0$ et tout $x_0 \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x_0 + \frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda \overrightarrow{x_0 x_i}.$$

Remarque 2.3.5. Un barycentre est clairement invariant par permutation des couples et par multiplication de tous les coefficients par un même scalaire. On peut, notamment, toujours supposer que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Proposition 2.3.6. Sous les hypothèses naturelles, on a

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{k_i} \mu_j^i x_j^i \Big) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_i^j x_i^j.$$

Comme le montre les propriétés suivantes, la notion de barycentre est intimement lié au caractère affine.

Proposition 2.3.7. Un sous-espace $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est affine ssi il est stable par barycentre, c'est-à-dire ssi

$$\forall i \in [\![1, k]\!], x_i \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in \mathcal{F}.$$

Proposition 2.3.8. Pour tout $X \subset \mathcal{E}$, $\mathrm{Aff}(X)$ est égal à l'ensemble des barycentres en les points de X, c'est-à-dire

$$\mathrm{Aff}(X) = \Big\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \;\Big|\; \forall i \in [\![1, k]\!], x_i \in X \Big\}.$$

Proposition 2.3.9. Une application $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine ssi elle respecte les barycentres, c'est-à-dire ssi

$$f\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \Big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

2.3.2 Bases affines

Définition 2.3.10. On dit que $k+1 \in \mathbb{N}^*$ points $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{E}$ sont affinement libres si et seulement si $\dim(\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\})) = k$. On dit qu'ils engendrent $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\}) = \mathcal{E}$
On appelle base affine de $\mathcal{E}$ tout k–uplet dans $\mathcal{E}$ dont les éléments forment une famille affinement libre de $\mathcal{E}$ engendrant $\mathcal{E}$.

Proposition 2.3.11. Un sous-ensemble ordonné fini $X \subset \mathcal{E}$ est une base affine de $\mathcal{E}$ ssi $|X| = \dim(\mathcal{E}) + 1$ et si, pour tout $x \in X$, $x \notin \mathrm{Aff}(X \setminus \{x\})$.

Proposition 2.3.12. Soit $\mathcal{B} := (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$.

Définition 2.3.13. Avec les notations de la proposition précédente, on appelle $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ coordonnées barycentriques de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 2.3.14. Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ une base affine de $\mathcal{E}$.

- Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est :
  - injective si et seulement si $f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathcal{F}$ est affinement libre ;
  - surjective si et seulement si $f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathcal{F}$ engendrent $\mathcal{F}$;
  - bijective si et seulement si $(f(x_0), \dots, f(x_n)) \in \mathcal{F}^{n+1}$ est une base affine de $\mathcal{F}$;

    les coordonnées barycentriques de tout point $f(x) \in \mathcal{F}$ dans la base $(f(x_0), \dots, f(x_n))$ sont alors égales aux coordonnées barycentriques de x dans $(x_0, \dots, x_n)$.
- Si $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{E})$, pour toute base affine $y_0, \dots, y_n \in \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$, il existe une unique bijection affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Proposition 2.3.15. Soit $\mathcal{B}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Pour tout système de points pondérés $((x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k))$ de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, et en notant $(\mu_1^i, \dots, \mu_n^i)$ les coordonnées barycentriques de x_i dans $\mathcal{B}$, la $j^{\text{ème}}$ coordonnée barycentrique de $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ dans $\mathcal{B}$ est $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_j^i$.

Proposition 2.3.16. Soit $\mathcal{B}$ une base affine d'un plan affine $\mathcal{P}$. Trois points de $\mathcal{P}$ son alignés ssi $\det(M) = 0$, où M est la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées barycentriques de chacun des points dans $\mathcal{B}$.

2.4 Quelques théorèmes classiques de géométrie affine

Notation 2.4.1. Pour tous points $x, y, z \in \mathcal{E}$ alignés tels que $x \neq z$, on note $\frac{xy}{xz}$ l'unique scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{xy} = \lambda \overrightarrow{xz}$

Théorème 2.4.2 (Thalès)**.** Soit $x_0, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathcal{E}$ des points distincts tels que les triplets x_0, y_1, z_1 et x_0, y_2, z_2 soient alignés. Alors les droites $(y_1 y_2)$ et $(z_1 z_2)$ sont parallèles ssi $\frac{x_0 y_1}{x_0 z_1} = \frac{x_0 y_2}{x_0 z_2}$.

Théorème 2.4.3. Soit $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathcal{E}$ des points distincts tels que les triplets x_1, y_1, z_2, x_1, y_2, z_1 et x_2, y_1, z_1 soient alignés. On note $P := \frac{x_2 y_1}{x_2 z_1} \cdot \frac{y_2 z_1}{y_2 x_1} \cdot \frac{z_2 x_1}{z_2 y_1}$. Alors

1. (Ménélaüs) les points x_2, y_2 et z_2 sont alignés ssi $P = 1$;
2. (Ceva) les droites $(x_1 x_2)$, $(y_1 y_2)$ et $(z_1 z_2)$ sont parallèles ou concourantes ssi $P = -1$.

Théorème 2.4.4 (Désargues)**.** Soit $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ des points distincts d'un plan affine.

1. Si les droites $(x_1 y_1)$ et $(x_2 y_2)$ d'une part et $(x_1 z_1)$ et $(x_2 z_2)$ d'autre part sont parallèles, alors les droites $(y_1 z_1)$ et $(y_2 z_2)$ sont parallèles ssi les droites $(x_1 x_2)$, $(y_1 y_2)$ et $(z_1 z_2)$ sont concourrantes ou parallèles.

2. Si $(x_1y_2) \cap (x_2y_1) =: \{a_{xy}\}$, $(y_1z_2) \cap (y_2z_1) =: \{a_{yz}\}$ et $(z_1x_2) \cap (z_2x_1) =: \{a_{zx}\}$, alors les points a_{xy}, a_{yz} et a_{zx} sont alignés ssi les droites (x_1x_2), (y_1y_2) et (z_1z_2) sont concourrantes ou parallèles.

Théorème 2.4.5 (Pappus)**.** Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites parallèles ou concourantes. Soit $x_1, y_1, z_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$ et $x_2, y_2, z_2 \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ des points distincts.

1. Si (x_1y_2) et (x_2y_1) d'une part et (x_1z_2) et (x_2z_1) d'autre part sont parallèles, alors les (y_1z_2) et (y_2z_1) sont parallèles.
2. Si $(x_1y_2) \cap (x_2y_1) =: \{a_{xy}\}$, $(y_1z_2) \cap (y_2z_1) =: \{a_{yz}\}$ et $(z_1x_2) \cap (z_2x_1) =: \{a_{zx}\}$, alors les points a_{xy}, a_{yz} et a_{zx} sont alignés.

3 Géométrie projective

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel.

3.1 Espaces

3.1.1 Espaces et sous-espaces

Définition 3.1.1. On appelle *espace projectif associé à E*, noté $\mathbb{P}(E)$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ voire $\mathbb{K}P^n$ si $E = \mathbb{K}^{n+1}$, l'espace des droites vectoriels de E. On note $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ la surjection canonique définie par $\pi(u) = \mathbb{K}.u$.
Si E est de dimension finie $n + 1 \in \mathbb{N}^*$, alors on dit que $\mathbb{P}(E)$ est de dimension finie n. Lorsque $n = 1$, on parle de *droite projective*, et lorsque $n = 2$, on parle de *plan projectif*.

Remarque 3.1.2. Un espace projectif n'a donc pas d'origine canonique.

Exemples 3.1.3.

1. Si $E = \{0\}$, alors $\mathbb{P}(E)$ est vide.
2. Si $\dim(E) = 1$, alors $\mathbb{P}(E)$ contient un unique point.
3. L'espace $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à $S^n/_{x \sim -x}$. Si $n = 1$, cela donne S^1. Si $n = 2$, cela donne une surface non orientable obtenue en recollant un disque sur le bord d'un ruban de Möbius.
4. L'espace $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2.
5. L'espace $\mathbb{F}_2P^1$ contient 3 points et $\mathbb{F}_2P^2$, appelé *plan de Fano*, en contient 7.

Définition 3.1.4. On dit qu'une partie X de $\mathbb{P}(E)$ est un *sous-espace projectif* si elle est elle-même l'espace projectif associé à un sous-espace-vectoriel de E, c'est-à-dire si il existe $F \subset E$ sous-espace vectoriel tel que $X = \mathbb{P}(F)$.
Si $\dim(F) = 2$, on parle de *droite projective de* $\mathbb{P}(E)$ et si $\dim(F) = \dim(E) - 1$, on parle d'*hyperplan projectif de* $\mathbb{P}(E)$.

Exemples 3.1.5.

1. L'ensemble vide est un sous-espace projectif.
2. Chaque point d'un espace projectif est un sous-espace projectif.

Remarque 3.1.6. Les applications

$$\pi_* : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{P}(E)) \\ F & \longmapsto & \pi(F \setminus \{0\}) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \pi^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ F & \longmapsto & \pi^{-1}(F) \cup \{0\} \end{array}$$

définissent des correspondances entre les sous-espaces vecoriels de E et les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$. De là découle directement un certain nombre de propositions.

Proposition 3.1.7. Toute intersection de sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif.

Proposition 3.1.8. Une réunion de sous-espaces projectifs n'est un sous-espace projectif que si l'un des deux sous-espace projectifs est contenu dans l'autre.

Définition 3.1.9. Pour tout $X \subset \mathbb{P}(E)$, on définit le *sous-espace projectif engendré par X* comme l'intersection de tous les sous-espaces projectifs contenant X.

Proposition 3.1.10. Si $\mathbb{P}(E)$ est de dimension n et que P_1 et P_2 sont deux sous-espaces projectifs tels que $\dim(P_1) + \dim(P_2) \geq n$, alors $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Démonstration. Par définition, il existe $F_1, F_2 \subset E$ sous-espaces vectoriels de E de dimension respectifs $\dim(P_1) + 1$ et $\dim(P_2) + 1$. Mais alors $\dim(F_1) + \dim(F_2) \geq n + 2 > \dim(E)$ et $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(\mathrm{Vect}(F_1 \cap F_2)) \geq \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(E) \geq 1$. il existe donc un vecteur non nul dans $F_1 \cap F_2$ et donc un élément dans $P_1 \cap P_2$. □

Corollaire 3.1.11. Dans un plan projectif, deux droites s'intersectent toujours.

Plus généralement, les trois propositions suivantes sont vraies pour tout espace projectif et ceci permettra de définir la notion d'*espace projectif abstrait* (voir TD).

Proposition 3.1.12. Soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif.

1. Par deux points distincts $a \neq b \in \mathbb{P}(E)$ il passe une unique droite projective que l'on note (ab).
2. Toute droite projective contient au moins 3 points.
3. Si $a, b, c, d \in \mathbb{P}(E)$ sont quatre points distincts tels que les droites (ab) et (cd) se coupent, alors les droites (ac) et (bd) se coupent aussi.

Exemple 3.1.13. Dessin du plan de Fano avec ses 7 droites.

3.1.2 Cartes affines

On considère ici E de dimension finie $n + 1$ vu comme un espace affine. Si $\mathcal{H} \subset E$ est un hyperplan de E ne contenant pas l'origine, on peut constater que chaque droite vectorielle de E soit coupe $\mathcal{H}$ en un unique point, soit est faiblement parallèle à $\mathcal{H}$.

Définition 3.1.14. On appelle *carte affine* toute injection de la forme

$$\pi_{\mathcal{H}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{P}(E) \\ x & \longmapsto & (0x) \end{array}$$

où $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E ne contenant pas l'origine 0 de E.

Remarques 3.1.15.

1. L'hyperplan $\mathcal{H}$ ne contenant pas 0, il ne possède pas d'origine canonique.
2. L'application $\pi_{\mathcal{H}}$ n'est pas surjective car elle n'atteint pas les droites faiblement parallèles à $\mathcal{H}$. Ces droites peuvent néanmoins être translatées dans $\mathcal{H}$ par n'importe quel vecteur $\overrightarrow{0x}$ avec $x \in \mathcal{H}$. On obtient ainsi un faisceau de droites parallèles ce qui correspond à une direction (non orientée) dans $\mathcal{H}$. On peut donc penser ces éléments de $\mathbb{P}(E)$ comme des points rajoutés à $\mathcal{H}$ à l'infini dans la direction correspondante. Attention, chaque droite génère un seul point à l'infini et non deux comme le cas réel pourrait laisser croire.

3. Cette notion de *point à l'infini* provient d'une carte affine donnée, mais les points correspondanst dans $\mathbb{P}(E)$ n'ont rien de particulier. Chaque point de $\mathbb{P}(E)$ ont en effet le même statut dans la mesure où pour chacun d'entre eux, il existe une carte affine qui le contient et une carte affine pour laquelle il est à l'infini.

Proposition 3.1.16. Tout espace projectif de dimension finie peut s'écrire comme réunion disjointe d'un espace affine de même dimenion et d'un espace projectif de dimension un de moins.

Démonstration. On fixe une carte affine $\pi_{\mathcal{H}}$. Les points à l'infini manquant correspondent aux droites vectorielles faiblement parallèles à $\mathcal{H}$. Cela correspond aux droites vectorielles contenues dans le plan H, parallèle à $\mathcal{H}$ passant par l'origine de E. Au final, on a donc $\mathbb{P}(E) = \mathrm{Im}(\pi_{\mathcal{H}}) \cup \mathbb{P}(H)$. □

Corollaire 3.1.17. Tout espace projectif de dimension finie n peut s'écrire comme réunion disjointe de $n+1$ espaces affines de dimensions $A_0, \cdots, A_n$ tels que $\dim(A_i) = i$.

Exemples 3.1.18.

1. $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$ peut se décomposer en une droite (ou un segment) plus un point collé simultanément aux deux extrémités.

2. $\mathbb{R}P^2$ peut se décomposer en un plan (ou un disque) plus une copie de $\mathbb{R}P^1$ collé sur son bord, ou encore comme la réunion d'un point, d'un segment et d'un disque.

3. $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ peut se décomposer comme une droite complexe (c'est-à-dire un plan réel) et un point.

Proposition 3.1.19. L'intersection d'une carte affine et d'un sous-espace projectif est soit vide, soit un sous-espace affine de la carte.

Démonstration. Soit $\pi_{\mathcal{H}}$ une carte affine et $P \subset \mathbb{P}(E)$ un sous-espace projectif. Il existe donc $F \subset E$ sous-espace vectoriel tel que $P = \mathbb{P}(F)$. Si F est faiblement parallèle à $\mathcal{H}$, alors $P \cap \mathrm{Im}(\pi_{\mathcal{H}}) = \emptyset$. Sinon, $F \cap \mathcal{H}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{H}$ dirigé par $F \cap H$ où H est l'hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$ passant par l'origine. □

Remarque 3.1.20. On a vu que deux droites projectives dans un plan projectif se coupent toujours. Or dans une carte affine, la trace de ces deux droites peut être deux droites parallèles qui ne se coupent pas. Leur intersection est alors le point à l'infini donné par leur direction commune.

Réciproquement, il est toujours possible de compléter un espace affine $\mathcal{E}$ en un espace projectif. Pour cela, on fixe une origine $x_0 \in \mathcal{E}$, ce qui donne une bijection $\xi_{x_0}^{-1} : \mathcal{E} \to E$. L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{P}(E \times \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \pi\Big((\xi_{x_0}^{-1}(x), 1)\Big) \end{array}$$

est alors une carte affine pour $\mathbb{P}(E \times \mathbb{K})$ modelée sur $\mathcal{E}$. On peut donc voir $\mathbb{P}(E \times \mathbb{K})$ comme une complétion de $\mathcal{E}$ à qui on a rajouté un hyperplan projectif à l'infini. Cette construction n'est toutefois pas canonique car elle nécessite le choix arbitraire d'une origine x_0. Il existe une construction canonique corrigeant ce défaut (voir TD).

3.1.3 Repères projectifs

Dans cette section, on suppose que $P(E)$ est un espace projective de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Chaque point non nul de E décrit une droite et deux points décrivent la même droite si et seulement si ils sont colinéaires. Les coordonnées d'un vecteur non nul de E dans une base donnée permettent de donc de fournir, à multiplication globale par un scalaire non nul près, une notion de coordonnées pour les éléments de $\mathbb{P}(E)$.

Définition 3.1.21. On appelle vecteur homogène de longueur $n+1 \in \mathbb{N}$ tout élément de $\left(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}\right)/_{x \sim \lambda x}$. On les note $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$.

Remarque 3.1.22. On a donc $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] = [\lambda\alpha_0 : \cdots : \lambda\alpha_n]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Définition 3.1.23. Si $e_0, \dots, e_n$ est une base de E, alors pour tout $x \in \mathbb{P}(E)$, on appelle *coordonnées homogènes de x dans la base $e_1, \dots, e_n$* l'unique vecteur homogène $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$ tel que $\pi(\alpha_0 e_0 + \cdots \alpha_n e_n) = x$.

Remarque 3.1.24. Si l'on multiplie chacun des vecteurs par des scalaires non nuls $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, alors la $i^{\text{ème}}$ coordonnée homogène d'un point donné est modifiée par multiplication par λ_i^{-1}. Si tous les scalaires sont égaux, cela ne modifie pas le vecteur homogène. Mais si au moins un des scalaires est différent des autres, alors les coordonnées homogènes sont modifiées.

Remarque 3.1.25. Si on considère la carte affine $\pi_{\mathcal{H}}$ associée à l'hyperplan $\mathcal{H}$ de E passant par e_0 et dirigé par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$, alors un point $x \in \mathbb{P}(E)$ apparait dans $\mathrm{Im}(\pi_{\mathcal{H}})$ si et seullement si ses coordonnées homogènes dans la base $e_0, \dots, e_n$ sont de la forme $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$ avec $\alpha_0 \neq 0$. Les coordonnées de $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(x)$ dans le repère $(e_0, \overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ sont alors $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \cdots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)$. Les points à l'infini, eux, correspondent aux points dont la première coordonnée homogène est nulle. Dans le cas réel (et complexe), on peut alors observer la continuité, le long d'une droite, entre les points de la carte et ceux à l'infini. En effet, toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ peut être décrite, dans la base $e_0, \dots, e_n$, comme l'ensemble des points de la forme $(1, x_1 + tu_1, \dots, x_n + tu_n)$ avec $e_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ un point fixé de $\mathcal{D}$, $u_1\overrightarrow{e}_1 + \cdots + u_n\overrightarrow{e_n}$ un vecteur directeur fixé de $\mathcal{D}$ et $t \in \mathbb{R}$ un paramètre libre. Dans $\mathbb{P}(E)$, cela donne comme coordonnées homogènes

$$[1, x_1 + tu_1 : \ldots : x_n + tu_n] \underset{\text{si } t \neq 0}{=} \left[\frac{1}{t}; \frac{x_1}{t} + u_1 : \cdots : \frac{x_n}{t} + u_n\right] \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} [0, u_1 : \ldots : u_n].$$

On peut remarquer que la limite ne dépend ni de l'origine fixé de la droite, ni du sens dans lequel on parcourt la droite. seule la direction globale de la droite importe.

A l'instar des bases affines de la géométrie affine, on peut vouloir décrire un repère par la donnée “interne” de points dans $\mathbb{P}(E)$ plutôt que par la donnée “externe” d'un repère de E. Se donner les images par π d'une base de E dans $P(E)$ n'est pas suffisant. En effet, rétroactivement, on pourra choisir une préimage par π pour chacun de ces points et cela donnera bien une base de E, donnant donc lieu à des coordonnées homogènes, mais le choix de chaque préimage se fait à un scalaire près et des choix différents méneront à des coordonnées homogènes différentes.

Définition 3.1.26. On dit que $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{P}(E)$ forment une famille projectivement libre si il engendrent un sous-espace projectif de dimension $k-1$, autrement dit si $\dim\left(\mathrm{Vect}(\bigcup_{i=1}^{k} \pi^{-1}(a_i))\right) = k$.

Exemples 3.1.27.

1. Deux points forment une famille projectivement libre si et seulement si ils sont distincts.

2. Trois points forment une famille projectivement libre si et seulement si ils ne sont pas alignés (c'est-à-dire contenues dans une même droite projective).

3. Si $\mathbb{P}(E)$ est de dimension finie n, alors $n+1$ points forment une famille libre si et seulement si ils engendrent projectivement tout $\mathbb{P}(E)$.

Définition 3.1.28. Un ensemble de $n+2$ points de $\mathbb{P}(E)$ forment un *repère projectif* si tout choix de $n+1$ parmi eux forment une famille projectivement libre.

Proposition 3.1.29. Pour tout repère projectif $(a_0, \dots, a_{n+1})$, il existe d'uniques, à multiplication globale par un scalaire non nul près, vecteurs $e_0, \dots, e_{n+1} \in E$ tels que, pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, $\pi(e_i) = a_i$ et $e_{n+1} = e_0 + \cdots + e_n$.

Démonstration. Pour chaque $i \in [\![0, n+1]\!]$, on fixe un antécédent $\tilde{e}_i$ de a_i par π. La famille $a_0, \dots, a_n$ étant projectivement libre, les vecteurs $\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_n$ forment une base de E et il existe donc d'uniques scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\tilde{e}_{n+1} = \lambda_0 \tilde{e}_0 + \cdots \lambda_n \tilde{e}_n$. En posant $e_{n+1} = \tilde{e}_{n+1}$ et $e_i = \lambda_i \tilde{e}_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on obtient la partie existence du résultat.

Pour l'unicité, on suppose $f_0, \dots, f_{n+1}$ est une autre famille de vecteurs de E vérifiant les même propriétés. Comme $\pi(e_i) = \pi(f_i)$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tel que $f_i = \lambda_i e_i$. Mais alors $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i = f_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{n+1} e_i$. Par unicité de la décomposition dans la base $e_0, \dots, e_n$, on a $\lambda_i = \lambda_{n+1}$ pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$. □

Définition 3.1.30. On appelle *coordonnées projectives dans le repère projectif* $a_0, \dots, a_{n+1}$ les coordonnées homogènes dans un repère $e_0, \dots, e_n$ de E tel que $\pi(e_i) = a_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et $\pi(e_0 + \cdots + e_n) = a_{n+1}$.

Remarque 3.1.31. Dans un repère projectif $a_0, \dots, a_{n+1}$, les coordonnées projectives de $a_0, a_1, \dots, a_n$ et a_{n+1} sont respectivement $[1 : 0 : \cdots : 0]$, $[0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$, …, $[0 : \cdots : 0 : 1]$ et $[1 : \cdots : 1]$.

La notion de coordonnées projectives peut se voir comme une généralisation des coordonnées barycentriques d'un espace affine $\mathcal{H}$ vu comme carte affine d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$.

Proposition 3.1.32. Si $\pi_{\mathcal{H}}$ est une carte affine munie d'une base affine $e_0, \dots, e_n \in \mathcal{H}$, alors en posant a_{n+1} l'isobarycentre [1] de ces points, les points $a_0 := \pi_{\mathcal{H}}(e_0), \dots, a_{n+1} := \pi_{\mathcal{H}}(e_{n+1})$ forment un repère projectif et les coordonnées projective d'un point $x \in \mathrm{Im}(\pi_{\mathcal{H}})$ dans le repère projectif $a_0, \dots, a_{n+1}$ sont égales aux coordonnées barycentriques de $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(x)$ dans la base affine $e_0, \dots, e_n$.

Démonstration. La famille $e_0, \dots, e_n$ étant affinement libre, les vecteurs $e_1 - e_0, \dots, e_n - e_0$ forment une famille libre qui engendrent H, et donc les vecteurs $e_0, \dots, e_n$ engendrent $H \oplus \mathbb{K}.e_0 = E$. Les points $a_0, \dots, a_n$ forment donc une famille projectivement libre de $\mathbb{P}(E)$. Par ailleurs, l'isobarycentre e_{n+1} ne peut être contenu dans aucun des espaces engendrés par tous les e_i sauf un car sinon il s'écrirait comme barycentre de ces points et cela contredirait l'unicité des coordonnées barycentriques. La famille $a_0, \dots, a_{n+1}$ forme donc un repère projectif.

Soit $u \in \mathcal{H}$ dont les coordonnées barycentriques dans la base affine $e_0, \dots, e_n$ sont $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. On a alors, pour n'importe quel $u_0 \in \mathcal{H}$, $u - u_0 = \overrightarrow{u_0 u} = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_0 e_i} = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i (e_i - u_0)$ et donc $u = u_0 + \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i - \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i u_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$. On a donc $\pi(u) = \pi(\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i)$ avec $\sum\limits_{i=0}^{n} e_i = (n+1) e_{n+1}$, et les coordonnées projectives de $\pi(u)$ sont donc bien $[\alpha_0 : \ldots : \alpha_n]$. □

Remarque 3.1.33. On pourrait remplacer l'isobarycentre par n'importe quel autre barycentre $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$ dont aucun coefficient α_i n'est nul. Les coordonnées projectives de $\pi(\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i a_i)$ sont alors $\left[\frac{\alpha_0}{\lambda_0} : \ldots : \frac{\alpha_n}{\lambda_n}\right]$.

Cela permet de prolonger la notion de barycentre aux systèmes de points pondérés dont la somme des coefficients s'annule. Dans ce cas, le barycentre est un point à l'infini, c'est-à-dire à une droite de H.

Proposition 3.1.34. Si $\pi_{\mathcal{H}}$ est une carte affine munie d'une base affine $e_0, \dots, e_n \in \mathcal{H}$, et si $e_{n+1} := \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ est un barycentre dont aucun des coefficient est nul, alors les points à l'infini sont exactement les points de coordonnées projectives $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$ avec $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = 0$.

Démonstration. On a déjà vu qu'un point dont la somme des coordonnées projective ne s'annule pas est l'image par π d'un barycentre des points $e_0, \dots, e_n$, donc un point de la carte affine.

1. si tant est qu'il soit défini

Considérons maintenant un point de coordonnées $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$ avec $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0$. Puisque $e_0, \ldots, e_n \in \mathcal{H}$, on a $e_i - e_0 \in H$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i = \alpha_0 e_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i - e_0) \in H.$$

□

Remarque 3.1.35. Pour compléter une base affine $e_0, \ldots, e_n$ en un repère projectif, rien n'oblige à prendre un point de la carte affine, on peut également prendre un point à l'infini qui ne soit dans aucun des sous-espaces projectifs engendrés par la base affine privé d'un point. Pour cela, il faut considérer une droite engendré par un vecteur qui s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i - e_0)$ avec tous les α_i non nuls. cela correspond à considérer un pseudo-barycentre des points $a_0, \ldots, a_n$ dont aucun coefficient n'est nul mais dont la somme s'annule.

Remarque 3.1.36. Un repère projectif peut aussi, à l'inverse, n'avoir que peu de points dans une carte affine donnée. Toute carte affine contient au moins deux points du repère car sinon $n+1$ points seraient dans l'hyperplan projectif à l'infini, et ces $n+1$ points ne seraient alors pas projectivement libre. Mais réciproquement, on peut choisir a_0 et a_{n+1} distincts dans une carte affine, et pour les $(a_i)_{i=1}^{n}$, n points à l'infini dans n directions linéairement indépendantes distinctes de la direction de la droite $(a_0 a_{n+1})$.

3.2 Applications

3.2.1 Applications projectives

Pour définir la notion d'application projective entre deux espaces $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$, on va s'appuyer sur les deux espaces E et F et les applications linéaires entre elles.

Proposition–Définition 3.2.1. Pour toute application linéaire injective $f : E \to F$, la composition $\pi_F \circ f \circ \pi_E^{-1}$ est bien définie. On l'appelle *projectivisé de* f et on la note $P(f) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{P}(E)$, $\pi_E^{-1}(x)$ est une droite vectorielle D^* de E privée de l'origine. L'application f étant injective et linéaire, l'image de D^* par f est aussi une droite vectorielle de F privé de l'origine, et son image par π_F est donc réduit un point de $\mathbb{P}(F)$. □

Remarque 3.2.2. Si f n'est pas injective, alors il existe une droite que f envoie entièrement sur 0. Le point correspondant de $\mathbb{P}(E)$ n'a donc pas d'image dans $\mathbb{P}(F)$. Il faut donc se résoudre ou bien à ne pas considérer les applications non injectives, ou bien à accepter qu'une application ne soit pas définie sur $\mathbb{P}(E)$ entier. Dans ce cours, nous faisons le premier choix.

Définition 3.2.3. On appelle *application projective de* $\mathbb{P}(E)$ *dans* $\mathbb{P}(F)$ toute application de la forme $P(f)$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. Toute application projective surjective est appelée *homographie*.

Proposition 3.2.4.

1. Toute application projective est injective et toute homographie est bijective.
2. Toute application projective d'un espace projectif de dimension finie dans lui-même est une homographie.
3. Toute composé d'applications projectives est projective.
4. La réciproque d'une homographie est une homographie.

Notation 3.2.5. On note $\mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$ le groupe, dit *projectif*, des homographies de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même.

Proposition 3.2.6. Deux applications linéaires injectives $f, g : E \to F$ ont la même projectivisé si et seulement si f et g sont colinéaires, c'est-à-dire si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \lambda f$.

Démonstration. Si f et g sont colinéaires, il est clair qu'elles ont la même projectivisé.

Réciproquement, supposons que $P(f) = P(g)$. Alors, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}^*$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. En fixant $x_0 \in E \setminus \{0\}$, il s'agit donc de montrer que $\lambda_x = \lambda_{x_0}$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Si $x = \mu x_0$, alors $\lambda_x f(x) = g(x) = \mu g(x_0) = \mu\lambda_{x_0} f(x_0) = \lambda_{x_0} f(x)$ et donc $\lambda_x = \lambda_{x_0}$.

Si x et x_0 sont linéairement indépendants, alors $\lambda_x f(x) + \lambda_{x_0} f(x_0) = g(x) + g(x_0) = g(x + x_0) = \lambda_{x+x_0} f(x + x_0) = \lambda_{x+x_0} f(x) + \lambda_{x+x_0} f(x_0)$. Mais comme f est injective, $f(x)$ et $f(x_0)$ sont également linéairement indépendant, et on a $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$. □

Corollaire 3.2.7. On a $\mathrm{P}\mathcal{GL}(E) \simeq \mathcal{GL}(E)/\mathbb{K}^*.\mathrm{Id}_E$.

Poursuivons l'étude des applications projectives en considérant un certain nombre de questions génériques.

Points fixes

Proposition 3.2.8. Les points fixes d'une homographie $P(f)$ de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même sont exactement les images par π des vecteurs propres de f.

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 3.2.9. Toute homographie d'un espace projectif complexe sur lui-même admet un point fixe.

Corollaire 3.2.10. Toute homographie d'un espace projectif réel de dimension paire sur lui-même admet un point fixe.

Applications et sous-espaces projectifs

Proposition 3.2.11. Une application projective envoie tout sous-espace projectif sur un sous-espace projectif de même dimension.

Corollaire 3.2.12. Toute application projective préserve l'alignement des points.

Théorème 3.2.13 (dit, en France, "fondamental de la géométrie projective")**.** Toute bijection d'un espace projectif dans lui-même est la projectivisé d'une application σ–linéaire de E dans lui-même, où σ est un automorphisme de corps. Notamment, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, il s'agit d'une homographie.

Démonstration. Voir littérature. □

Applications et repères projectifs

Proposition 3.2.14. L'image d'un repère projectif par une homographie est un repère projectif.

Proposition 3.2.15. Soit $P(f) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ une application projective, et $R_{P(E)}, R_{P(F)}$ des repères projectifs pour, respectivement, $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{P}(E)$, les coordonnées projectives de $P(f)(x)$, vis-à-vis du repère de $R_{P(F)}$, sont obtenus en multipliant les coordonnées projectives de x, vis-à-vis du repère de $R_{P(E)}$, par $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, où $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont respectivement les bases de E et F, relevant $R_{P(E)}$ et $R_{P(F)}$.

Théorème 3.2.16 (dit, dans le monde anglo-saxon, “fondamental de la géométrie projective”)**.** Soit $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$ deux espaces projectifs de même dimension finie n, muni respectivement de repères projectifs $a_0, \ldots, a_{n+1}$ et $b_0, \ldots, b_{n+1}$. Il existe une unique homographie $P(f) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ envoyant a_i sur b_i pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$. Les coordonnées projectives d’un point et son images par $P(f)$ dans les deux repères sont alors les mêmes.

Démonstration. D’après la proposition 3.1.29, il existe $e_0, \ldots, e_{n+1} \in E$ et $f_0, \ldots, f_{n+1} \in F$ tels que $\pi(e_i) = a_i$ et $\pi(f_i) = b_i$ pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, $e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} e_i$ et $f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} f_i$. Les vecteurs $e_0, \ldots, e_n$ et $f_0, \ldots, f_n$ formant respectivement des bases de E et F, il existe unique bijection linéaire $f : E \to F$ envoyant chacun des e_i sur f_i, pour $i \in [\![0, n]\!]$, et donc e_{n+1} sur f_{n+1}. L’homographie $P(f)$ envoie alors a_i sur b_i pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$.

Supposons que $P(g) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ soit une homographie vérifiant les même propriétés. Alors, pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tel que $g(e_i) = \lambda_i f_i$. Mais alors $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{n+1} e_i = \lambda_{n+1} e_{n+1} = g(e_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} g(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$. Les vecteurs $e_0, \ldots, e_n$ formant une base de E, on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1}$ et donc $g = \lambda_{n+1} f$. D’après la proposition 3.2.6, $P(g) = P(f)$.

La dernière affirmation est alors une conséquence de la proposition 3.2.15. □

Applications et cartes affines

Proposition 3.2.17. Soit $P(f) \in P\mathcal{GL}(E)$ une homographie et $\pi_{\mathcal{H}}$ une carte affine pour $\mathbb{P}(E)$. Si $P(f)$ fixe globalement l’hyperplan à l’infini, alors $P(f)_{|\mathcal{H}}$ est une application affine.

Démonstration. Puisque $P(f)$ est une bijection de $\mathbb{P}(E)$ sur lui-même, si elle fixe l’hyperplan à l’infini, c’est qu’elle fixe également $\mathcal{H}$.

On fixe une base affine $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ que l’on complète en un repère projectif R de $\mathbb{P}(E)$ en rajoutant l’isobarycentre g des éléments de cette base affine. L’application $P(f)$ envoie alors R sur des points de $\mathcal{H}$ formant un repère projectif, et donc $\mathcal{B}$ sur une base affine de $\mathcal{H}$. De plus, g est envoyé sur un barycentre des éléments de $\mathcal{B}$ dont aucun des coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ n’est nul. Supposons par l’absurde qu’il ne s’agit pas de l’isobarycentre. Alors on peut trouver $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0$ mais $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \alpha_i \neq 0$. Alors, d’après la proposition 3.1.32, la remarque 3.1.33, la proposition 3.1.34 et le théorème 3.2.16, le point de coordonnée de $[\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$ est un point de l’hyperplan à l’infini envoyé par $P(f)$ sur $\mathcal{H}$, ce qui est absurde. L’image de g est donc l’isobarycentre des images des éléments de $\mathcal{B}$. La proposition 3.1.32 et le théorème 3.2.16 montrent alors que l’application $P(f)_{|\mathcal{H}}$ préserve les barycentres, et donc qu’elle est affine. □

Remarque 3.2.18. Cette preuve nécessite tout de même que l’isobarycentre des éléments de $\mathcal{B}$ soit bien défini et donc que $\mathrm{Car}(\mathbb{K})$ ne divise pas $\dim(\mathbb{P}(E)) + 1$. Mais dans ce cas, et si $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, on peut toutefois remplacer l’isobarycentre par tout autre barycentre. On peut également, et ce même si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, garder la preuve à l’identique en se rappelant que, dans le cadre projectif, les “barycentres pour des coefficients dont la somme s’annule” existent et correspondent à des points à l’infini.

Proposition 3.2.19. Soit $\pi_{\mathcal{H}}$ une carte affine pour $\mathbb{P}(E)$. Pour tout $f_{\mathcal{H}} \in \mathrm{GA}(\mathcal{H})$, il existe une unique application projective $P(f) \in P\mathcal{GL}(E)$ fixant l’hyperplan à l’infini et vérifiant $P(f)_{|\mathcal{H}} = f_{\mathcal{H}}$. La restriction de $P(f)$ à l’hyperplan à l’infini correspond alors à $P(\overrightarrow{f}_{\mathcal{H}})$.

Démonstration. On fixe $e_1, \ldots, e_n$ une base de $H \subset E$, l’espace directeur de $\mathcal{H}$ et on la complète en une base de E en rajoutant $e_0 \in E$ tel que $\mathcal{H} = e_0 + H$. On définit alors $f \in \mathcal{GL}(E)$ par $f(e_0) = f_{\mathcal{H}}(e_0)$ et $f(e_i) = \overrightarrow{f}_{\mathcal{H}}(e_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. L’application $f_{\mathcal{H}}$ étant bijective, $\overrightarrow{f}_{\mathcal{H}}$ l’est aussi et donc f est bijective. On a en effet $f(e_0) = e_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et donc $\det(f) = \det(\overrightarrow{f}_{\mathcal{H}}) \neq 0$. On peut donc considérer $P(f)$ et pour tout $x = e_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathcal{H}$,

$P(f)(x)$ est la classe d'équivalence, dans $\mathbb{P}(E)$, de $f(e_0+\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = f(e_0)+\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = f_{\mathcal{H}}(e_0)+\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f}_{\mathcal{H}}(e_i) = f_{\mathcal{H}}(e_0)+\overrightarrow{f}_{\mathcal{H}}(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = f_{\mathcal{H}}(x)$. L'hyperplan à l'infini correspond ici à $\mathbb{P}(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n))$, sur lequel la restriction de $P(f)$ est bien $P(\overrightarrow{f}_{\mathcal{H}})$.

Pour l'unicité, il suffit de fixer un repère projectif contenu dans la carte affine et appliquer le théorème 3.2.16. □

3.2.2 Polynômes homogènes

On peut vouloir considérer des applications plus générales que les simples applications projectives, par exemple de type polynomiale. Là encore, on peut s'appuyer sur l'espace vectoriel E sous-jacent en se limitant aux applications qui passent bien au quotient projectif.

Définition 3.2.20. On appelle *polynôme homogène de degré $d \in \mathbb{N}$* en plusieurs variables tout polynôme qui s'écrit comme somme de monômes de même degré global égal à d.

Exemples 3.2.21.

- Les polynômes $X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1$ et $X_1X_2^2 - X_3^3$ sont homogènes de degré, respectivement, 2 et 3.
- Les polynômes $1 + X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1$ et $X_1X_2^2 - X_3^2$ ne sont pas homogènes.
- Tout monôme est homogène.

Proposition–Définition 3.2.22. Un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ étant donné, tout polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables définit une application, dite *polynomiale*, de $\mathbb{P}(E)$ vers $\mathbb{P}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}/\{\lambda^d | \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Démonstration. Soit $P(x_0,\dots,X_n)$ un polynôme homogène de degré d. On définit alors f_P sur $\mathbb{P}(E)$ par $f_P(x) := P(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)$ où $[\lambda_0 : \cdots : \lambda_n]$ sont les coordonnées projectives de x dans le repère donné. Ces dernières sont données à un facteur multiplicatif $\lambda \in \mathbb{K}^*$ près, mais le polynôme étant homogène, cela se traduit par un facteur λ^d à l'arrivée. □

Exemples 3.2.23.

- Les fonctions polynomiales de degré 1 définies sur $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ correspondent aux homographies de $\mathbb{P}(\mathbb{K})$.
- L'étude des coniques correspondra à l'étude des fonctions polynomiale de degré 2.
- Si on considère la base de $\mathcal{L}(E)$ donnée, pour une base de E fixée, par les applications dont la matrice ne contient que des 0 sauf un 1, alors le déterminant donne un polynôme homogène de degré $n+1$. cela induit donc une application polynomiale det sur $\mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$. Le groupe projectif $\mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$ peut être vu comme le complémentaire, dans $\mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$, des zéros de det.

3.3 Notions complémentaires

3.3.1 Théorèmes fondamentaux de géométrie projective

Théorème 3.3.1 (Désargues)**.** Soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension au moins 2. Soit a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 deux triplets de points de $\mathbb{P}(E)$ tels que, pour tous $i \neq j \in \{1,2,3\}$, les droites (a_ia_j) et (b_ib_j) se coupent en un point c_{ij}. Alors les points c_{12}, c_{23} et c_{31} sont alignés si et seulement si les droites (a_1b_1), (a_2b_2) et (a_3b_3) sont concourantes.

Théorème 3.3.2 (Pappus)**.** Soit $\mathbb{P}(E)$ un plan projectif. Soit $\mathbb{D}_1 \neq \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{P}(E)$ deux droites projectives et $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{D}_2 \setminus \mathbb{D}_1$. Pour tous $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, on note d_{ij} l'intersection de $(a_i b_j)$ et $(a_j b_i)$. Alors les points d_{12}, d_{23} et d_{31} sont alignés.

Démonstration. Les points a_1, b_1, b_2, c_2 forment un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$, autrement les droites $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ auraient une seconde intersection, et seraient donc confondues. Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont :

$$a_1 : [1 : 0 : 0] \qquad a_2 : [0 : 1 : 0] \qquad a_3 : [1 : \alpha : 0]$$

$$b_1 : [1 : 1 : \beta] \qquad b_2 : [0 : 0 : 1] \qquad b_3 : [1 : 1 : 1].$$

On en déduit que

$$d_{23} : [0 : 1 - \alpha : 1] \qquad d_{31} : [1 - \alpha : 0 : -\alpha\beta] \qquad d_{12} : [1 : \beta : \beta],$$

les coordonnées de d_{ij} étant en effet simultanément des combinaisons linéaires des coordonnées de a_i et b_j, et de a_j et b_i.

Finalement, on constate que $\beta(0, 1 - \alpha, 1) + (1 - \alpha, 0, -\alpha\beta) + (\alpha - 1)(1, \beta, \beta) = 0$, montrant que les points d_{12}, d_{23} et d_{31} sont alignés. □

3.3.2 Birapport

Dans cette section et sauf mention contraire, on considère $\mathbb{P}(E)$ une droite projective.

Remarque 3.3.3. L'application *pente* définie par $\left([a : b] \mapsto \frac{a}{b}\right)$ permet, sur $\mathbb{P}(E)$, d'interpréter toute coordonnées homogènes comme un élément de $\widehat{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$.

Définition 3.3.4. On appelle *birapport de* $a, b, c, d \in \mathbb{P}(E)$, où a, b et c deux à deux distincts, les coordonnées projectives, vues dans $\widehat{\mathbb{K}}$, de d dans le repère projectif a, b, c. Cela correspond à $f(d)$ où $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{K}P^1$ est l'unique homographie vérifiant $f(a) = \infty$, $f(b) = 0$ et $f(c) = 1$.

Exemple 3.3.5. Par définition, on a $[a, b, c, a] = \infty$, $[a, b, c, b] = 0$ et $[a, b, c, c] = 1$.

Proposition 3.3.6. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{P}(E)$ avec a, b et c deux à deux distincts. On note, respectivement, $z_a, z_b, z_c, z_d \in \widehat{\mathbb{K}}$ les coordonnées homogènes de a, b, c, d dans une base de E donnée. Alors $[a, b, c, d] = \frac{\frac{z_a - z_c}{z_a - z_d}}{\frac{z_b - z_c}{z_b - z_d}}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et des antécédents $u_a, u_b, u_c, u_d \in E \setminus \{0\}$ de a, b, c, d par π. On note $(a_0, a_1), (b_0, b_1), (c_0, c_1), (d_0, d_1)$ les coordonnées de, respectivement, u_a, u_b, u_c, u_d dans $\mathcal{B}$.

On définit maintenant la quantité

$$\alpha(u_a, u_b, u_c, u_d, \mathcal{B}) := \frac{\frac{\det_{\mathcal{B}}(u_a, u_c)}{\det_{\mathcal{B}}(u_b, u_c)}}{\frac{\det_{\mathcal{B}}(u_a, u_d)}{\det_{\mathcal{B}}(u_b, u_d)}} = \frac{\frac{a_0 c_1 - a_1 c_0}{b_0 c_1 - b_1 c_0}}{\frac{a_0 d_1 - a_1 d_0}{b_0 d_1 - b_1 d_0}} = \frac{\frac{\frac{a_0}{a_1} - \frac{c_0}{c_1}}{\frac{b_0}{b_1} - \frac{c_0}{c_1}}}{\frac{\frac{a_0}{a_1} - \frac{d_0}{d_1}}{\frac{b_0}{b_1} - \frac{d_0}{d_1}}} = \frac{\frac{z_a - z_c}{z_a - z_d}}{\frac{z_b - z_c}{z_b - z_d}}.$$

Si $\mathcal{B}'$ est un autre base de E et que l'on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on a

$$\alpha(u_a, u_b, u_c, u_d, \mathcal{B}') = \frac{\frac{\det(P) \det_{\mathcal{B}}(u_a, u_c)}{\det(P) \det_{\mathcal{B}}(u_b, u_c)}}{\frac{\det(P) \det_{\mathcal{B}}(u_a, u_d)}{\det(P) \det_{\mathcal{B}}(u_b, u_d)}} = \alpha(u_a, u_b, u_c, u_d, \mathcal{B}).$$

Si u'_a, u'_b, u'_c, u'_d sont d'autres antécédents de a, b, c, d, on a $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d \in \mathbb{K}^*$ tels que $u'_a = \lambda_a u_a$, $u'_b = \lambda_b u_b$, $u'_c = \lambda_c u_c$, $u'_d = \lambda_d u_d$ et alors

$$\alpha(u'_a, u'_b, u'_c, u'_d, \mathcal{B}) = \frac{\frac{\lambda_a\lambda_c \det_{\mathcal{B}}(u_a,u_c)}{\lambda_b\lambda_c \det_{\mathcal{B}}(u_b,u_c)}}{\frac{\lambda_a\lambda_d \det_{\mathcal{B}}(u_a,u_d)}{\lambda_b\lambda_d \det_{\mathcal{B}}(u_b,u_d)}} = \alpha(u_a, u_b, u_c, u_d, \mathcal{B}).$$

Au final, α ne dépend que de a, b, c, d. Choisissons donc la base de E associée au repère projectif a, b, c. On a alors $z_a = \infty$, $z_b = 0$ et $z_c = 1$. On obtient alors $\alpha = \frac{\frac{\infty-1}{\infty-z_d}}{\frac{0-1}{0-z_d}} = z_d = [a, b, c, d]$. □

Proposition 3.3.7. Toute homographie préserve le birapport de points alignés, c'est-à-dire si $\mathbb{P}(E)$ est un espace projectif quelconque, si $a, b, c, d \in \mathbb{P}(E)$ sont quatre points alignés avec a, b et c deux à deux distincts, et si $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ est une homographie, alors $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$.

Dans le cas d'une droite, le birapport permet même de caractériser les homographies.

Proposition 3.3.8. Une bijection entre droites projectives est une homographie si et seulement si elle préserve le birapport.

Démonstration. Seul le sens indirect nécessite une preuve. Pour cela on considère une bijection $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ entre droites projectives qui préserve le birapport, on fixe $a, b, c \in \mathbb{D}_1$ un repère projectif et on considère $g : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ l'unique homographie qui envoie a, b, c sur $f(a), f(b), f(c)$. Pour tout $d \in \mathbb{D}_1$, on a donc $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d] = [g(a), g(b), g(c), g(d)] = [f(a), f(b), f(c), g(d)]$. Les points $f(d)$ et $g(d)$ ont donc les même coordonnées projectives dans le repère projectif $f(a), f(b), f(c)$, ils sont donc égaux et on a $f = g$. □

Corollaire 3.3.9. Toute homographie, exprimée en terme de coordonnées homogènes, est de la forme $\left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

3.3.3 Dualité

A tout espace vectoriel E, on peut associer son espace dual E^* qui est un espace vectoriel de même dimension. Bien qu'il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre E et E^*, mais nous allons voir que leurs quotients projectifs entretiennent une étroite relation.

Dans tout ce suit, E (et donc $\mathbb{P}$) sera de dimension finie.

3.3.3.1 Cadre général

Proposition 3.3.10. Deux formes linéaires $f, g \in E^* \backslash \{0\}$ ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\pi(f) = \pi(g) \in \mathbb{P}(E^*)$.

Démonstration. Si f et g sont colinéaires, il est clair qu'elles ont le même noyau.

Supposons maintenant qu'elles ont le même noyau $H \subset E$ et fixons $u_0 \in E \setminus H$. Le noyau H étant un hyperplan de E, on a $E = H \oplus \mathbb{K}.u_0$. De plus, u_0 n'étant pas dans le noyau commun de f et g, on a $f(u_0), g(u_0) \neq 0$. Posons $\lambda_0 := \frac{g(u_0)}{f(u_0)} \in \mathbb{K}^*$. Pour tout $x \in E$, on a $x' \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = x' + \mu.u_0$ et donc $g(x) = \mu.g(u_0) = \lambda_0\mu.f(u_0) = \lambda_0 f(x)$. Les applications f et g sont donc colinéaires. □

Définition 3.3.11. On note $\mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$ l'espace des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(E)$. On dit que $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2, \mathbb{H}_3 \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$ sont *concourants* si $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \cap \mathbb{H}_3$ est un sous-espace projectif de codimension au plus 2.

Exemples 3.3.12. En dimension 2, trois droites sont concourantes si elles passent par un même point. En dimension 3, trois plans sont concourants s'ils contiennent une même droite.

Proposition 3.3.13. L'application $\kappa : \mathbb{P}(E^*) \to \mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$ définie par $\kappa(\mathbb{K}.f) = \pi(\mathrm{Ker}(f))$ est une bijection.

Démonstration. L'injectivité est une conséquence directe de la proposition 3.3.10. Pour la surjectivité, on considère $\mathbb{H} := \mathbb{P}(H) \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$ avec $H \subset E$. On fixe $u_0 \in E \setminus H$ et on définit la forme linéaire f par $f_{|H} \equiv 0$ et $f(u_0) = 1$. Clairement $\kappa(f) = \mathbb{H}$. □

L'ensemble des hyperplans projectif de $\mathbb{P}(E)$ peut donc être canoniquement vu comme un espace projectif. Voyons ce qu'il advient de la notion d'alignement.

Proposition 3.3.14. Trois points $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{P}(E^*)$ sont alignés si et seulement si $\kappa(x_1)$, $\kappa(x_2)$ et $\kappa(x_3)$ sont concourants.

Démonstration. On note $f_1, f_2, f_3 \in E^*$ telles que $\pi(f_i) = x_i$ et on pose $H_i = \mathrm{Ker}(f_i)$. On a donc notamment $\pi(H_i) = \kappa(x_i)$.

Si x_1, x_2 et x_3 sont alignés, quitte à renuméroter les indices, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $f_3 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Mais alors $H_1 \cap H_2 \subset H_3$ et donc $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_2$ est de codimension au plus 2. Les hyperplans $\kappa(x_1)$, $\kappa(x_2)$ et $\kappa(x_3)$ sont donc bien concourants.

Réciproquement, supposons que $\kappa(x_1)$, $\kappa(x_2)$ et $\kappa(x_3)$ sont concourants. Alors, ou bien tous les $H_i \cap H_j$ sont de codimension 1, mais alors $H_1 = H_2 = H_3$ et donc $x_1 = x_2 = x_3$ sont bien alignés ; ou bien, quitte à renuméroter les indices, $H_1 \cap H_2$ est de codimension 2. Mais $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset H_1 \cap H_2$ est de codimension au plus 2, on a alors $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_2$, c'est-à-dire, $H_1 \cap H_2 \subset H_3$. Soit $u \in H_3 \setminus (H_1 \cap H_2)$. Si $f_1(u) = 0$ alors $H_1 = H_3$ et donc $x_1 = x_3$, les trois points sont donc alignés. Sinon $\left(f_2 - \frac{f_2(u)}{f_1(u)} f_1\right)(u) = 0$ et donc $H_3 \subset \mathrm{Ker}\left(f_2 - \frac{f_2(u)}{f_1(u)} f_1\right)$. On a donc $f_2 - \frac{f_2(u)}{f_1(u)} f_1 = \lambda f_3$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$ et les formes f_1, f_2 et f_3 sont liés. On en déduit que x_1, x_2 et x_3 sont alignés. □

On peut, bien entendu, réitérer la dualité et considérer $(E^*)^*$ le bidual de E. On sait que E et $(E^*)^*$ sont canoniquement isomorphes via l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & (E^*)^* \\ u & \longmapsto & f \mapsto f(u) \end{array}.$$

Cela permet, réciproquement, d'identifier $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}((E^*)^*)$, et donc $\mathbb{P}(E)$ et $\mathcal{H}(\mathbb{P}(E^*))$.

3.3.3.2 Dualité sur une droite

Soit $\mathbb{D} := \mathbb{P}(E)$ une droite projective. Les hyperplans de $\mathbb{D}$ sont alors les points de $\mathbb{D}$ et l'application κ est une bijection de $\mathbb{D}^* := \mathbb{P}(E^*)$ dans $\mathbb{D}$.

Proposition 3.3.15. L'application $\kappa : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}$ est une homographie.

Démonstration. On considère une base e_1, e_2 de E et $e_1^*, e_2^* \in E^*$ sa base duale. Pour tout $f = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* \in E^* \setminus \{0\}$, on a $f(\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2) = \alpha_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = 0$. On en déduit que, en les coordonnées projectifs associées à e_1^*, e_2^* et e_1, e_2, on a $\kappa([\alpha_1 : \alpha_2]) = [\alpha_2 : -\alpha_1]$ et κ est donc la projectivisé de l'application dont la matrice dans ces bases est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

3.3.3.3 Dualité dans un plan

Soit $\mathbb{P} := \mathbb{P}(E)$ un plan projectif. Les hyperplans de $\mathbb{P}$ sont alors les droites de $\mathbb{P}$, idem pour $\mathbb{P}^* := \mathbb{P}(E^*)$. Pour toute droite projective $d \in \mathcal{H}(\mathbb{P})$, on notera $d^* := \kappa^{-1}(d)$ le point de $\mathbb{P}^*$ associé, et pour tout point $a \in \mathbb{P}$, on notera $a^* := \kappa(P(\psi)(a))$ la droite projective de $\mathbb{P}^*$ associée.

On a alors le principe de dualité suivant.

Proposition 3.3.16. On a la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} d = (a_1a_2) \text{ dans } \mathbb{P} &\iff d^* \in a_1^* \cap b_2^* \text{ dans } \mathbb{P}^* \\ a_1, a_2, a_3 \in P \text{ alignés} &\iff a_1^*, a_2^*, a_3^* \in \mathcal{H}(P^*) \text{ concourrants} \\ d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{H}(P) \text{ concourants} &\iff d_1^*, d_2^*, d_3^* \in P^* \text{ alignés.} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour le premier point, on commence par fixer une base u_1, u_2, u_3 de E telle que $\pi(u_1) = a_1$ et $\pi(u_2) = a_2$. On note par ailleurs u_1^*, u_2^*, u_3^* la base duale. On a alors $(a_1a_2) = \pi(\mathrm{Vect}(u_1, u_2))$, $a_1^* = \pi(\mathrm{Vect}(u_2^*, u_3^*))$ et $a_2^* = \pi(\mathrm{Vect}(u_1^*, u_3^*))$. Mais alors $(a_1a_2)^* = \pi(u_3^*) \in a_1^* \cap a_2^*$ et $a_1^* \cap a_2^* = \pi(\mathrm{Vect}(u_3^*))$.

Les deux derniers points se déduisent de la proposition 3.3.14 appliquée à $\mathbb{P}$ et à $\mathbb{P}^*$. □

Remarque 3.3.17. L'ensemble des droites passant par un point $a \in \mathbb{P}$, appelé *faisceau de droites*, est donc en bijection avec l'ensemble des points de la droite projective a^* de $\mathbb{P}^*$, formée des formes linéaires s'annulant sur un antécédent de a. On peut à ce titre le considérer comme une droite projective. On définit, par exemple, ainsi une notion de birapport pour quatre droites concourantes.

Corollaire 3.3.18 (Dual du théorème de Pappus)**.** Soit $\mathbb{P}$ un plan projectif et $a \neq b \in \mathbb{P}$ deux points. Soit d_1^a, d_2^a, d_3^a trois droites passant par a mais pas par b et d_1^b, d_2^b, d_3^b trois droites passant par b mais pas par a. Pour tout $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, on d_{ij} la droite passant par $d_i^a \cap d_j^b$ et $d_j^a \cap d_i^b$. Alors, les droites d_{12}, d_{23} et d_{31} sont concourantes.

Remarque 3.3.19. Le dual du théorème de Désargues redonne le théorème de Désargues. Plus précisement, il montre le sens indirect à partir du sens direct et inversement.

La dualité dans le plan permet également d'interpréter homographiquement la correspondance entre les points d'une droite $d \subset \mathbb{P}$ donnée et les droites passant par un point donné hors de cette droite d.

Proposition 3.3.20. Soit $d \subset \mathbb{P}$ une droite projective et $a \in \mathbb{P} \setminus d$. Alors l'application d'incidence $\iota_{d,a} : a^* \to d$, qui identifie tout $x \in a^*$ à une droite $\kappa(x) \subset \mathbb{P}$ passant par a et associe son intersection avec d, est une homographie.

Démonstration. On fixe $u_0 \in E$ et $F \subset E$ un plan vectoriel tels que $\pi(u_0) = a$ et $\pi(F) = d$. On note aussi $L^* \subset E^*$ l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur u_0, il s'agit d'un plan vectoriel, et on a $\pi(L^*) = a^*$. On considère maintenant $\rho : L^* \to F^*$ qui à $f \in L^*(\subset E^*)$ associe sa restriction $f_{|F}$ à F. Puisque $u_0 \notin F$, on a $E = F \oplus \mathbb{K}.u_0$ et l'application ρ est donc injective. Mais $\dim(L^*) = \dim(F^*) = 2$, elle est bijective et induit une homographie $P(\rho) : a^* \to \mathbb{P}(F^*)$. En composant avec $\kappa : \mathbb{P}(F^*) \to \mathbb{P}(F)$, on obtient d'après la proposition 3.3.15, une homographie de a^* vers d qui n'est autre que $\iota_{d,a}$. En effet, prenons maintenant $x \in a^*$. On a $x = \pi(f)$ où f est une forme linéaire s'annulant sur un plan $H \subset E$ tel que $\pi(H)$ est la droite de $\mathbb{P}$ passant par a associée à x. Sa restriction $\rho(f)$ est donc une forme linéaire de noyau $H \cap F = \mathbb{K}.v$, avec $\pi(v) = \iota_{d,a}(x)$. □

4 Coniques & Quadriques