Université Aix-Marseille	2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

Examen partiel
8 novembre 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Dans tout cet examen, les espaces vectoriels (et donc les espaces affines) seront, sauf mention contraire explicite, considérés sur $\mathbb{K}$, un corps de caractéristique différente de 2.

Exercice 1. (6 points)

1. Donner la définition :
   (a) de la signature d'une forme quadratique réelle ;
   (b) d'un barycentre.
2. (a) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine et trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \subset \mathcal{P}$ non concourante et deux à deux non parallèles. Montrer qu'il existe une unique application affine envoyant $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_2$ sur $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_3$ sur $\mathcal{D}_1$.
   (b) Soit f, g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension au moins 3. Montrer que la forme quadratique $q : x \mapsto f(x)g(x)$ est dégénérée.

Exercice 2. (7 points) On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

1. Déterminer φ_q, la forme polaire associée à q, ainsi que sa matrice dans la base canonique.
2. A l'aide de l'algorithme de Gauss, déterminer la signature et le rang de q. La forme quadratique q est-elle dégénérée ? Est-elle définie ?
3. Déterminer une base $\mathcal{B}$ orthogonale pour q.
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.
5. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on note $u_\mu := (\mu, -1, 1)$ et E_μ l'ensemble des vecteurs q–orthogonaux à u_μ. Pour quels valeurs de μ a-t-on $E_\mu \oplus \mathbb{R}.u_\mu = \mathbb{R}^3$?

Exercice 3. (4 points) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, et $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite de $\mathcal{E}$. On fixe également $a \neq b \in \mathcal{D}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est égal à l'ensemble des barycentres en a et b.
2. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On note a' le milieu des points a et $f(a)$, et b' le milieu des points b et $f(b)$.
   (a) Pour tout point $x \in \mathcal{D}$, exprimer le milieu des points x et $f(x)$ comme barycentre des points a' et b'.
   (b) Montrer que l'ensemble $\left\{\text{milieu de } x \text{ et } f(x) \;\middle|\; x \in \mathcal{D}\right\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension au plus 1.

TSVP ⇒

Exercice 4. (4 points) On considère, dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Rappeler la classification des isométries de $\mathbb{R}^3$.

2. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}z}{4} + \sqrt{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}z}{2} - \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{3}x}{4} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{z}{4} - 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

   (a) Montrer que f est affine et déterminer la matrice de sa linéarisé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que f est une isométrie affine.

   (c) Déterminer la nature géométrique de f.

(bonus) En fonction de sa nature, donner toutes les caractéristiques géométriques de f.