Université Aix-Marseille 2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

Examen partiel
corrigé

Exercice 1.

1. (a) Pour une forme quadratique q définie sur un espace vectoriel réel de dimension finie E, la signature est définie comme le couple d'entiers (p, n) où p (resp. n) est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que $q_{|F}$ soit définie positive (resp. définie négative).

   (b) Pour un système de points pondérées $(a_1, \lambda_1), \ldots, (a_k, \lambda_k)$, où les a_i sont des points d'un espace affine $\mathcal{E}$ et les λ_i des scalaires dont la somme ne s'annule pas, le barycentre est l'unique point $b \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{a_i b} = \overrightarrow{0}$.

2. (a) Les droites sont deux à deux non parallèles mais contenues dans un même plan, elles se coupent donc deux à deux. Notons a_1 (resp. a_2, a_3) l'intersection de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ (resp. de $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1$, de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$). Les droites n'étant pas concourantes, les points a_1, a_2 et a_3 sont distincts ; et ils non alignés car sinon chacune des droites serait égale à la droite qui contiendrait les trois intersections, cela contredirait leur non parallélisme. Le triplet (a_1, a_2, a_3) forme donc une base affine de $\mathcal{P}$.

   Si une application affine permutant les trois droites existe, alors elle permute également les points a_1, a_2 et a_3. Or il existe une unique application affine f qui envoie la base affine (a_1, a_2, a_3) sur la base affine (a_2, a_3, a_1). Réciproquement, cette application f envoie $a_2, a_3 \in \mathcal{D}_1$ sur $a_3, a_1 \in \mathcal{D}_2$, donc $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$; et de même pour les deux autres droites.

   (b) La forme quadratique q est dégénérée si il existe $u_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que l'application $(v \mapsto \varphi_q(u_0, v))$ soit nul. Ici, φ_q est la forme polaire associée à q, définie par $\varphi_q(u, v) := \frac{1}{2}(f(u)g(v) + f(v)g(u))$. Or les noyaux de f et g sont des sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$ de codimension au plus 1. Leur intersection $F \cap G$ est donc de codimension au plus 2, et comme E est de dimension au moins 3, $F \cap G$ n'est pas réduit à 0. On peut donc choisir $u_0 \in F \cap G \setminus \{0\}$. On a alors bien, pour tout $v \in E$, $\varphi_q(u_0, v) := \frac{1}{2}(f(u_0)g(v) + f(v)g(u_0)) = 0$.

Exercice 2.

1. Par dédoublement des variables, on a pour tous $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $u_i = (x_i, y_i, z_i)$,

$$\varphi_q(u_1, u_2) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1z_2 + 3x_2z_1 + 4y_1y_2 + 8y_1z_2 + 8y_2z_1 + 9z_1z_2.$$

   Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Par l'algorithme de Gauss, on a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \\ &= (x + 2y + 3z)^2 - (2y + 3z)^2 + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \\ &= (x + 2y + 3z)^2 + 4yz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 + (y + z)^2 - (y - z)^2. \end{aligned}$$

   On en déduit que la signature de q est $(2, 1)$ et que son rang est 3. Son rang est maximal, q est donc non dégénérée ; mais comme elle n'est, au demeurant, ni positive ni négative, elle n'est pas définie.

3. Dans la question précédente, on a écrit q comme somme alternée des formes linéaires $\ell_1 : (x,y,z) \mapsto x+2y+3z$, $\ell_2 : (x,y,z) \mapsto y+z$ et $\ell_3 : (x,y,z) \mapsto y-z$. Pour déterminer une base orthogonale pour q, il faut trouver trois vecteurs non nuls $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ annulant chacun deux des trois formes linéaires. Il existe plusieurs méthodes pour faire cela. La plus élémentaire est de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & \alpha \\ y+z & = & \beta \\ y-z & = & \gamma \end{array}\right.$$

pour, successivement, $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Par pivot de Gauss, le système ci-dessus devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \alpha - \frac{5}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma \\ y & = & \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma \\ y & = & \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{array}\right. .$$

On peut donc poser $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := \left(\frac{-5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $u_2 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

La question ne demandant pas une base *orthonormé*, on peut éventuellement avoir envie de simplifier cette base en $u_1' := (1,0,0)$, $u_2' := (-5,1,1)$ et $u_3' := (1,1,-1)$.

4. La première base $\mathcal{B}$ donnée dans la question précédente étant orthonormé pour q, la matrice de q dans cette base est diagonale faisant apparaitre ± 1 sur la diagonale selon la signature (et la correspondance des vecteurs de la base avec les formes linéaires ℓ_i). On obtient donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La seconde base $\mathcal{B}'$ n'est, quant à elle, qu'orthogonale. Il faut donc être attention aux valeurs absolues des coefficients diagonaux. Par changement de base par rapport à $\mathcal{B}$ ou par calcul direct, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout μ, on a $u_\mu \neq 0$. Or la forme quadratique est non dégénérée, donc la forme linéaire $(u \mapsto \varphi_q(u_\mu, u))$ est non nulle et son noyau est de dimension 2. Pour que $E_\mu \oplus \mathbb{R}.u_\mu = \mathbb{R}^3$, il suffit donc que u_μ ne soit pas dans E_μ, c'est-à-dire que u_μ ne soit pas dans le cône isotrope de q. Or, par calcul direct, $q(u_\mu) = \mu^2 + 2\mu - 3 = (\mu-1)(\mu+3)$. On a donc $E_\mu \oplus \mathbb{R}.u_\mu = \mathbb{R}^3$ pour tout $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$.

Exercice 3.

1. On a $\mathcal{D} = a + \mathbb{K}.\overrightarrow{ab}$. Or pour tout barycentre $g := (1-\lambda)a + \lambda b$, on a $\overrightarrow{ag} = (1-\lambda)\overrightarrow{aa} + \lambda\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{ab}$ et donc $g = a + \lambda\overrightarrow{ab} \in \mathcal{D}$. Réciproquement, pour tout $g = a + \lambda\overrightarrow{ab} \in \mathcal{D}$, on a $\overrightarrow{ag} = \lambda\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{ag} + \lambda\overrightarrow{gb}$ et donc $(1-\lambda)\overrightarrow{ag} + \lambda\overrightarrow{bg}$. Autrement dit $g = (1-\lambda)a + \lambda b$.

2. (a) Soit $x \in \mathcal{D}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Les applications affines préservant les barycentres, on a alors $f(x) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. Mais alors, en notant m le milieu de x et $f(x)$, on a par associativité des barycentres

$$\begin{array}{rcl} m & = & \frac{1}{2}\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) + \frac{1}{2}\Big(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\Big) \;=\; \frac{\lambda}{2}a + \frac{1-\lambda}{2}b + \frac{\lambda}{2}f(a) + \frac{1-\lambda}{2}f(b) \\ & = & \frac{\lambda}{2}a + \frac{\lambda}{2}f(a) + \frac{1-\lambda}{2}b + \frac{1-\lambda}{2}f(b) \;=\; \lambda\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}f(a)\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}f(b)\right) \\ & = & \lambda a' + (1-\lambda)b'. \end{array}$$

(b) Lorsque x décrit $\mathcal{D}$, l'ensemble des milieux entre x et $f(x)$ décrit donc l'ensemble des barycentres de a' et b', c'est-à-dire $\mathrm{Aff}(\{a', b'\})$. Si $a' = b'$, il s'agit d'un singleton ; si $a' \neq b'$, il s'agit d'une droite. Dans les deux cas, on obtient bien un sous-espace affine de dimension 0 ou 1.

Exercice 4.

1. Une isométrie de $\mathbb{R}^3$ peut être :

- une translation ;
- un vissage, c'est-à-dire une rotation (non nulle) autour d'un axe composée avec une translation parallèle à cet axe ;
- une réflexion glissée, c'est-à-dire une réflexion par rapport à un plan composée avec une translation parallèle à ce plan ;
- une anti-rotation, c'est-à-dire une rotation (non nulle) autour d'un axe composée avec une réflexion par rapport à un plan orthogonal à cet axe.

2. (a) On fixe $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\overrightarrow{f(a_0)f(a)} = \begin{pmatrix} \frac{3(x-x_0)}{4} - \frac{y-y_0}{2} + \frac{\sqrt{3}(z-z_0)}{4} \\ \frac{x-x_0}{2} - \frac{\sqrt{3}(z-z_0)}{2} \\ \frac{\sqrt{3}(x-x_0)}{4} + \frac{\sqrt{3}(y-y_0)}{2} + \frac{z-z_0}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

où $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ est le vecteur colonne de $\overrightarrow{a_0 a}$ dans la base canonique. On en déduit que $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(a_0)f(a_0 + \overrightarrow{u})}$ est linéaire, sa matrice dans la base canonique étant

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(b) Il suffit de vérifier que les colonnes de la matrice M trouvée à la question précédente sont bien chacune de norme 1 et deux à deux orthogonale. En les notant C_1, C_2 et C_3, on trouve bien

$$\|C_1\|^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = 1 \qquad \|C_1\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \qquad \|C_3\|^2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{4} + \frac{1}{16} = 1$$
$$C_1.C_2 = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0 \qquad C_2.C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} = 0 \qquad C_1.C_3 = \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} = 0.$$

(c) On peut commencer par calculer le déterminant et la trace de M. En développant selon la seconde ligne, on trouve $\det(M) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = 1$. Or, parmi les isométries de $\mathbb{R}^3$, seuls les translations et les vissages ont un déterminant égal à 1. De plus, les translations ont pour trace 3, or $\mathrm{Tr}(M) = 1$. On en déduit que f est un vissage.

(bonus) Pour déterminer le vissage, il faut déterminer l'axe $\mathcal{D}$ de la rotation, l'angle θ de la rotation (pour le signe, il faudra fixer une orientation pour l'axe de la rotation) et le vecteur u de translation.

On peut commencer par déterminer la direction D de l'axe de rotation en identifiant l'espace propre de M associé à la valeur propre 1. Pour cela on résout

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui donne $D = \mathbb{R}.(-\sqrt{3}, 0, -1)$.

On peut alors déterminer u en projetant orthogonalement sur $0 + D$ l'image de $f(0)$. En effet, l'image x de 0 par la rotation sera dans le plan orthogonal à $\mathcal{D}$, donc orthogonal à $0 + D$, passant par 0. Sa projection orthogonal sur $0 + D$ sera donc toujours 0. Et la translation par u enverra ensuite x sur un point qui se projectera orthogonalement sur $0 + D$ en u. Or $f(0) = (\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1)$ et son projeté sur $0 + D$ est

$$u = \frac{(\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1).(-\sqrt{3}, 0, -1)}{\|(-\sqrt{3}, 0, -1)\|^2}(-\sqrt{3}, 0, -1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

En composant f avec la translation par $-u$, on obtient alors juste la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ. Les seuls points fixes de cette rotation sont les points de $\mathcal{D}$, et en déterminer un permettra de fixer entièrement $\mathcal{D}$. La rotation est donc

$$r\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}z}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}z}{2} - \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{3}x}{4} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

et en résolvant $r(x, y, z) = (x, y, z)$, on trouve $\left\{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}(1 + \lambda), \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}, \lambda\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ comme ensemble de points fixe dans lequel on peut choisir $x_0 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}, 0\right)$. On final, on a

$$\mathcal{D} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}, 0\right) + \mathbb{R}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Pour l'angle θ, on sait que la trace (dans une base bien choisie) vaut $1 + 2\cos(\theta)$. On en déduit que $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Pour déterminer le signe, il faut déjà fixer une orientation à $\mathcal{D}$, par exemple celle induite par u, puis choisir une base (v, w) sur le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par x_0 tel que la base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ soit positive, écrire la matrice de la restriction de la rotation r à $\mathcal{P}$ et voir si cela correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Plus rapidement, mais en utilisant des outils non revus ensemble mais classiques en géométrie vectoriel, on pourra regarder le signe du produit mixte $\left[\overrightarrow{x_0 0}, \overrightarrow{x_0 r(0)}, u\right] = \left(\overrightarrow{x_0 0} \wedge \overrightarrow{x_0 r(0)}\right).u$. Cela donne

$$\left(-\sqrt{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}, 0\right) \wedge \left(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{4}, -\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{6} + 11}{4}\right)$$

et donc

$$\left[\overrightarrow{x_0 0}, \overrightarrow{x_0 r(0)}, u\right] = \left(\frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{4}, -\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{6} + 11}{4}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} > 0.$$

Il s'agit donc d'une rotation d'angle $\theta = +\frac{\pi}{2}$.