Université Aix-Marseille	2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

Examen de rattrapage
21 juin 2017

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
L'épreuve dure trois heures.

Exercice 1.

1. Donner les définitions :
   (a) de la base duale associée à une base donnée d'un espace vectoriel de dimension finie ;
   (b) d'un sous-espace affine d'un espace affine ;
   (c) du birapport de quatre points d'une droite projective.
2. Enoncer le théorème de Pappus.
3. Montrer que deux applications linéaires injectives ont le même projectivisé si et seulement si elles sont colinéaires.
4. Soit $\mathbb{D}$ une droite projective, a_1, a_2, a_3 une base projective de $\mathbb{D}$ et $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une homographie. Montrer que h est une involution si et seulement si, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $[a_1, a_2, a_3, h(a_i)] = [h(a_1), h(a_2), h(a_3), a_i]$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On fixe $f, g : E \to \mathbb{K}$ deux formes linéaires et on définit $r : E \to \mathbb{K}$ par $r(x) = f(x)g(x)$.

1. Montrer que r est une forme quadratique, et exprimer sa forme polaire en fonction de f et g.
2. On suppose dans cette question que f et g sont linéairement indépendants dans E^*.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(g)$.
   (b) Déterminer le cône isotrope et le noyau de r.
   (c) Donner le rang et, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la signature de r.
3. Déterminer le cône isotrope, le noyau, le rang et, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la signature de r lorsque f et g ne sont pas linéairement indépendants dans E^*.
4. On considère maintenant le cas particuliers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1$ et $g(x_1, x_2, x_3) = 4x_3$. On pose également $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fome quadratique définie par $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$.
   (a) Montrer que q est définie positive.
   (b) i. Donner les matrices R et Q de, respectivement, r et q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
       ii. Montrer que si $u \in E$ est un vecteur d'une base de diagonalisation simultanée pour r et q, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u \in \mathrm{Ker}(R + \mu Q)$ et $\det(R + \mu Q) = 0$.
       iii. Déterminer une base de diagonalisation simultanée pour r et q.

Exercice 3. Pour tout groupe G, on définit l'opération de crochet par

$$[\ .\ ,\ .\ ] : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & aba^{-1}b^{-1} \end{array}.$$

1. Que dire de l'opération crochet lorsque G est abélien ?
2. On considère maintenant un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, GA le groupe affine associé et Isom le groupe des isométries. On dira qu'un élément de GA est positif si le déterminant de son linéarisé est positif, et note Isom^+ l'ensemble des isométries positives de $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que, pour tout $f, g \in \mathrm{GA}$, $[f, g]$ est positif.
   (b) Montrer que, pour tout $f, g \in \mathrm{Isom}^+$, $[f, g]$ est une translation.
   (c) Soit $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathrm{Isom}$, que dire de $\Big[\big[[a,b],[c,d]\big], \big[[e,f],[g,h]\big]\Big]$?

Exercice 4. Dans le plan projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, on fixe une droite $\mathbb{D}$ et trois points $a, b, c \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \mathbb{D}$ non alignés. On note $p := (bc) \cap \mathbb{D}$, $q := (ca) \cap \mathbb{D}$ et $r := (ab) \cap \mathbb{D}$.

1. On fixe maintenant $o \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus (\mathbb{D} \cup (ab) \cup (bc) \cup (ca))$, et on pose $p' = (oa) \cap \mathbb{D}$, $q' = (ob) \cap \mathbb{D}$ et $r' = (oc) \cap \mathbb{D}$.
   (a) Faire une figure.
   (b) Refaire une figure en envoyant (bc) à l'infini.
   (c) A l'aide de deux projections successives, montrer que $[p, q, r, p'] = [p, r', q', p']$.
   (d) En déduire que $[p, q, r, p'] = [p', q', r', p]$.
   (e) Montrer qu'il existe une unique homographie involutive $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telle que $h(p) = p'$, $h(q) = q'$ et $h(r) = r'$.
2. Enoncer la proposition duale du résultat montré dans la question 1.
3. Enoncer la réciproque du résultat montré dans la question 1, et montrez là.