Université Aix-Marseille	2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

TD 1,5

Exercice 1. Montrer que $O(n)$, $SO(n)$ sont des sous-espaces compacts de l'espace de matrices $M_n(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^n)^n$.

Exercice 2. Soit (E, φ) un espace euclidien.

1. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_k)$. Donner des formules explicites pour les symétries s_F, $s_{F^{\perp_\varphi}}$.
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace affine de E, F_0 sa direction (son sous-espace directeur) muni d'une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_k)$, et soit v_0 la projection de 0_E sur F. Donner une formule explicite pour la symétrie s_F.

Exercice 3. Soit (E, φ) un espace euclidien, et soit $\mathrm{Isom}(E, d_\varphi)$ le groupe des isométries de l'espace métrique (E, d_φ). Soient $f \in \mathrm{Isom}(E, d_\varphi)$, $f_0 \in O(E)$ la partie linéaire de f, et $F_0 \subset E$ son lieu fixe (qui coïncide avec l'espace propre $E_1^{f_0}$). Montrer qu'il existe une unique paire $(g, v) \in \mathrm{Isom}(E, d_\varphi) \times E$ telle que l'une des deux propriétés équivalentes soit vérifiée :

1. $v \in F_0$, $\mathrm{Fix}(g)$ est un sous-espace affine d'espace directeur F_0, et $f = \tau_v \circ g = g \circ \tau_v$,
2. $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$ et $f = \tau_v \circ g = g \circ \tau_v$.

Donc toute isométrie de (E, d_φ) se décompose d'une manière unique comme la composition d'une isométrie avec un point fixe et une translation, qui commutent.

Exercice 4. Soient (E, φ) un plan euclidien, et $f : E \to E$ une isométrie de l'espace métrique (E, d_φ). Démontrer que

1. Si f est une isométrie directe, alors son lieu fixe $\mathrm{Fix}(f)$ est soit E, soit un singleton, soit $\emptyset$. Dans le premier cas $f = \mathrm{Id}_E$, dans le deuxième cas f est une rotation (qui ne coïncide pas avec Id_E), et dans le troisième cas f une translation de vecteur $v \neq 0$.
2. Si f est une isométrie indirecte, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est soit un droite affine $d \subset E$, soit $\emptyset$. Dans le premier cas f est une symétrie axiale, et dans le deuxième cas f est une symétrie glissée de vecteur de glissement non-nul.

   Rappel : La symétrie glissée d'axe d et vecteur de glissement v est la composition $f = \tau_v \circ s_d$, où $d \subset E$ est une droite affine, et $v \in d_0$, où d_0 est la direction (le sous-espace directeur) de d.

Résumer ce théorème (la classification des isométries planes) dans un tableau dont les colonnes correspondent aux types d'isométrie (directe ou indirecte), et les lignes correspondent aux dimensions possibles du lieu fixe.

Exercice 5. Énoncer et démontrer un théorème de classification pour les isométries de (l'espace métrique associé à) un espace euclidien 3-dimensionnel. Préciser dans chaque cas le type isométrie (directe, indirecte) et la dimension du lieu fixe.

Exercice 6. Décrire explicitement les groupes de symétrie d'un tétraèdre régulier et d'un cube (dans un espace euclidien de dimension 3). Spécifier les sous-groupes des déplacements (des isométries directes) de ces groupes.

Exercice 7. (le groupe affine et le groupe des isométries comme produits semi-directs) Soit A, B deux groupes dont les lois sont notées par juxtaposition, et soit $\chi : B \to \mathrm{Aut}(A)$ un homomorphisme de groupes. Le produit semi-direct $A \rtimes_\chi B$ de A par B suivant χ est le groupe $(A \times B, \circ)$ où $\circ$ désigne la loi de composition interne définie par

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) := (a_1\chi(b_1)(a_2), b_1 b_2).$$

1. Montrer que $(A \times B, \circ)$ est bien un groupe, $B' := \{e_A\} \times B$ est un sous-groupe, et $A' := A \times \{e_B\}$ est un sous-groupe normal de ce groupe.
2. Soit E un K-espace vectorel. Montrer que le groupe $\mathrm{Aff}(E)$ des transformations affines de E est isomorphe au produit semi-direct $E \rtimes_\rho \mathrm{GL}(E)$, où $\rho : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{Aut}(E, +)$ désigne l'homomorphisme naturel.
3. Soit (E, φ) un espace euclidien. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(E, d_\varphi)$ des isométries de l'espace métrique associé (E, d_φ) est isomorphe au produit sémi-direct $E \rtimes_r \mathrm{O}(E)$, où $r : \mathrm{O}(E) \to \mathrm{Aut}(E, +)$ désigne l'homomorphisme naturel.

Via ces isomorphismes le sous-groupe $E \times \{\mathrm{Id}_E\}$ du produit semi-direct correspond au groupe de translations de E.

Exercice 8. Soient $\mathbb{H}$ le corps des quaternions, $\mathbb{H}_0 := \{xi + yj + zk | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ le sous-espace des quaternions imaginaires (muni de sa structure naturelle d'espace euclidien tridimensionnel), et $\mathfrak{S}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ la sphère unité. Montrer que

1. $\mathfrak{S}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$.
2. La formule
$$\mathfrak{S}(\mathbb{H}) \ni q \to \iota_q \in \mathrm{GL}(H_0),\ \iota_q(h) := qhq^{-1}$$
définit un épimorphisme de groupes $\iota : \mathfrak{S}(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}(H_0)$.
3. Préciser $\ker(\iota)$. En déduire que $\mathrm{SO}(3)$ s'identifie au quotient de S^3 par la relation d'équivalence engendrée par l'involution antipodale $x \mapsto -x$.