Université Aix-Marseille	2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

TD 1

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ formée des deux vecteurs $e'_1 = (1,1)$ et $e'_2 = (1,-1)$.

1. Déterminer la forme bilinéaire φ dont la matrice *dans la base* $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et calculer $\varphi((5,4),(3,2))$.
2. Exprimer la forme quadratique associée à φ par rapport à $\mathcal{B}$ puis par rapport à la base canonique.

Exercice 2. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 6xz + 2yz$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que q est non dégénérée.
3. Déterminer la matrice de q dans la base (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1,2,-1)$, $e_2 = (2,3,1)$, $e_3 = (1,1,1)$.

Exercice 3. Pour chacune des formes quadratiques suivantes, définies sur $\mathbb{R}^n$, déterminer la forme polaire et la matrice dans la base canonique

$$q_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ , \quad q_2 : x \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j \ , \quad q_3 : x \mapsto x_1^2 - x_2^2 \ , \quad q_4 : x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_3 x_4 \ .$$

Exercice 4. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$.

1. Déterminer la forme polaire φ associée à q. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique. L'espace $\mathbb{R}^3$ admet-il une base orthogonale et/ou orthonormale relativement à g_q ?
2. Utiliser la méthode de Gauss pour écrire q comme somme de carrés. En déduire une base orthogonale pour q.
3. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice de φ. Construire, à partir de ces vecteurs propres, une base orthonormale pour le produit scalaire canonique et orthogonale pour q.

Exercice 5. Par la méthode de Gauss, Décomposer en carrés les formes quadratiques réelles suivantes. En déduire la signature puis donner une base orthogonale.

$$q_1 : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+2xy-xz+yz \ , \quad q_2 : (x,y,z) \mapsto xy+xz+yz \ , \quad q_3 : (x,y,z,t) \mapsto x^2-y^2+2xy-2yz-2zt.$$

Exercice 6. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x,y,z) = 2xy - 2yz - 2xz$.

1. Déterminer la forme polaire φ de q, et la matrice A de φ dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et le rang de φ.
3. Soit $v = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le sous-espace orthogonal $\pi = v^{\perp_\varphi} := \{x \in \mathbb{R}^3 | \ \varphi(v,x) = 0\}$ de v par rapport à la forme bilinéaire symétrique φ. Quel type d'objet géométrique est π ?

4. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
5. Déterminer les valeurs propres de A, leur multiplicités algébriques.
6. Déterminer les espaces propres de A (associés à chaque valeur propre) et les multiplicités géométriques des valeurs propres. Préciser une base pour chaque espace propre.
7. En déduire une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, qui est orthonormée par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$.
8. Déterminer la matrice de φ, l'expression de φ et l'expression de q dans la base (e_1, e_2, e_3) trouvée à la question précédente.
9. Déterminer la signature de q. Est-ce que φ est un produit scalaire ?
10. Déterminer le cône isotrope de q en utilisant la base (e_1, e_2, e_3),
11. Déterminer une forme diagonale (standard) de q en utilisant l'algorithme de Gauss. Utiliser cette forme pour déterminer la signature de q et comparer le résultat obtenu avec celui trouvé à la question 9.

Exercice 7. Déterminer tous les cônes isotropes possibles pour une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $M_{|k}$ la sous-matrice extraite des k premières lignes et k premières colonnes et on appelle $k^{\text{ième}}$ mineur principal dominant de M le déterminant de $M_{|k}$.

On note E un espace vectoriel réel de dimension fini et $q \in \mathrm{Quad}(E)$ une forme quadratique sur E.

1. Si M est la matrice de q dans une base donnée $\mathcal{B}$, montrer que $M_{|k}$ est la matrice de q restreinte au sous-espace vectoriel engendré par les k premiers vecteurs de $\mathcal{B}$.
2. Notons (σ_p, σ_n) la signature de q et M sa matrice dans une base donnée. Montrer que $\det(M) = 0$ ssi q est dégénérée, et qu'autrement, le signe de $\det(M)$ vaut $(-1)^{\sigma_n}$.
3. Soit $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \subset F_2$, $\dim(F_2) = \dim(F_1) + 1$, $q_{|F_1}$ est définie positive mais $q_{|F_2}$ ne l'est pas. Montrer que si M est la matrice de $q_{|F_2}$ dans une base donnée, alors $\det(M) \leq 0$.
4. Soit M la matrice de q dans une base donnée. Montrer que q est définie positive ssi tous les mineurs de M sont strictement positifs.
5. La forme quadratique $q : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 2xy - 6xy + 5y^2 - 14yz - z^2$ est-elle définie positive ?

Exercice 9. On dit qu'une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est anti-symétrique si elle vérifie, pour tout $x, y \in E$, $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$. Montrer que, si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, le noyau de l'application qui à une forme bilinéaire φ associe la forme quadratique $(x \mapsto \varphi(x, x))$ est formé de toutes les formes bilinéaire anti-symétriques.

Exercice 10. On se place sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^s$ impair.

1. (a) Montrer que l'application $\mathrm{Sq} : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*$ qui envoie un élément sur son carré est un morphisme de groupe.
   (b) En déduire qu'il existe $\frac{q+1}{2}$ carrés (éléments qui s'écrivent sous la forme x^2) dans $\mathbb{F}_q$.
   (c) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q$, il existe $a, b \in \mathbb{F}_q$ tels que $a^2 + b^2 = \alpha$.
2. On fixe maintenant $\alpha_0 \in \mathbb{F}_q$ qui ne soit pas un carré et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$.
   (a) Montrer que tout élément de $\mathbb{F}_q$ qui ne soit pas un carré s'écrit sous la forme $\alpha_0 x^2$ avec $x \in \mathbb{F}_q$.

(b) Montrer que, pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ soit diagonal avec des 0, des 1 et des α_0 sur la diagonale.

(c) Montrer que, pour toute forme quadratique $q \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ soit diagonal avec des 0, des 1 et, au plus, un α_0 sur la diagonale.

Exercice 11. Soit (E, φ) un espace euclidien de dimension n, et $\psi : E \times E \to \mathcal{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme φ–symétrique f de E tel que, pour tous $x, y \in E$,

$$\varphi(x, f(y)) = \psi(x, y).$$

2. Démontrer que E admet une décomposition, unique à ordre près, en somme directe qui est à la fois φ-orthogonale et ψ-orthogonale,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i,$$

telle que $\psi_{|E_i \times E_i} = a_i \varphi_{|E_i \times E_i}$ pour $1 \leq i \leq k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux.

3. Démontrer que E admet une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} a_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k I_{d_k} \end{pmatrix},$$

où $d_i = \dim(E_i)$. En particulier cette base est φ-orthonormée et ψ-orthogonale, et diagonalise donc simultanément les formes bilinéaires φ et ψ. Exprimer φ, ψ et les formes quadratiques q_f, q_g dans une telle base.

4. Soit $C = (w_1, \ldots, w_n)$ une base arbitraire de E, et $\tau_C : \mathbb{R}^n \to E$ l'isomorphisme linéaire associé à C.

   (a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f dans la base C est $M := \mathrm{Mat}_C^{-1}(\varphi)\mathrm{Mat}_C(\psi)$.

   (b) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

   (c) On note $\mathrm{Spec}(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ et $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{l} F_i$ la décomposition en espaces propres associée à M. Montrer que les sous-espaces $E_i := \tau_C(F_i)$ donnent une décomposition en somme directe de E avec la propriété mentionnée à la question 2 (en particulier $l = k$), et $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$.

   (d) En utilisant ces résultats donner un algorithme explicite (qui ne nécessite pas le calcul de la matrice inverse $M_C(f)^{-1}$!) qui détermine une décomposition en somme directe avec la propriété mentionnée à la question 2, et une base B avec la propriété mentionnée à la question 3.