Université Aix-Marseille 2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

TD 2

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est un espace affine dirigé, respectivement, par E. F et G.

Exercice 1. On appelle *parallélogramme* tout quadruplet $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{E}$ tels que les droites (x_1x_2) et (x_3x_4) d'une part, et (x_1x_3) et (x_2x_4) d'autre part, soient parallèles. Montrer que, pour tous points $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

i. (x_1, x_2, x_3, x_4) est un parallélolgramme ;

ii. $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_3x_4}$;

iii. $\overrightarrow{x_1x_3} = \overrightarrow{x_2x_4}$;

iv. (si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2) $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

Exercice 2. Parmi les espaces suivants, déterminez ceux qui sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$:

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$;
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}$;
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$;
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$;
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x\}$;
6. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$;
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$;
8. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ et } x - y + z = -1\}$.

Exercice 3.

1. Montrer que l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables est un espace vectoriel.
2. Montrer que pour tout $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tels que $f^{(n)} = f_0$ est un sous-espace affine dont on précisera l'espace directeur.

Exercice 4.

1. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, montrer qu'un sous-ensemble d'un espace affine est un sous-espace affine si et seulement si il contient toute droite passant par deux de ses points.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, donner un contre-exemple à l'équivalence de la question 1..

Exercice 5. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines.

1. Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
2. Qu'en est-il pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.

Exercice 6. On note $E^{\mathcal{E}} := \{f : \mathcal{E} \to E\}$ l'espace des applications (quelconques) de $\mathcal{E}$ dans E.

1. Montrer que $E^{\mathcal{E}}$ est un espace vectoriel, donc un espace affine.
2. Pour tout $u \in E$, on note $c_u : \mathcal{E} \to E$ l'application constante égale à u. Montrer que l'application $c : E \to E^{\mathcal{E}}$ qui à $u \in E$ associe c_u est une application linéaire injective. Peut-elle être surjective ?

3. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on note $\xi : \mathcal{E} \to E^{\mathcal{E}}$ l'application qui à $x \in \mathcal{E}$ associe

$$\xi_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}.$$

   (a) Montrer que ξ est une injection de $\mathcal{E}$ dans $E^{\mathcal{E}}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $\xi_x - \xi_y = c_{\overrightarrow{xy}}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(\xi)$ est un sous-espace affine de $E^{\mathcal{E}}$ dirigé par $\mathrm{Im}(c)$. Est-ce un sous-espace vectoriel ?
   (d) On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.
      i. Décrire $\mathrm{Vect}(\mathrm{Im}(\xi))$.
      ii. Montrer que $\mathrm{Im}(\xi)$ est un hyperplan affine de $\mathrm{Vect}(\mathrm{Im}(\xi))$.

Exercice 7. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine.

1. Montrer que l'application $\psi_f : \mathcal{E} \to E$ définie par $\psi_f(x) = \overrightarrow{xf(x)}$ est affine de linéarisé $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 8.

1. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'espace directeur F, et soit G un supplémentaire de F dans E.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $x + G$ s'intersectent en un unique point.

   Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on définit $p(x)$ comme l'unique point dans $\mathcal{F} \cap (x + G)$.

   (b) Montrer que l'application $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une projection affine telle que $\mathrm{Fix}(p) = \mathcal{F}$ et $\mathrm{Im}(\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}_E) = G$.
2. Soit $p \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ une projection affine. On pose $\mathcal{F} := \mathrm{Fix}(p)$ et $G := \mathrm{Im}(\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}_E)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(p) \neq \emptyset$.
   (b) Montrer que $F \oplus G = E$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $p(x)$ est l'unique point dans $\mathcal{F} \cap (x + G)$

Exercice 9. Caractérisation des applications affines réelles
Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels de même dimension finie $n \geq 2$. On considère $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ bijective préservant l'alignement des points. On veut montrer que f est affine.

1. (a) Montrer que, pour tout sous-espace affine $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $f^{-1}(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine.
   (b) Montrer que f envoie une base affine de $\mathcal{E}$ sur une base affine de $\mathcal{F}$. En déduire que les images par f de points affinement libres sont affinement libres.
   (c) Montrer que f envoie tout sous-espace de dimension $k \in \mathbb{N}$ de $\mathcal{E}$ sur un sous-espace de dimension k de $\mathcal{F}$.
   (d) Montrer que f envoie deux droites parallèles sur deux droites parallèles.
2. On fixe maintenant $o \in \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine contenant o, $a \in \mathcal{D}$ et $b \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$.
   (a) On pose $c = o + \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob}$. Montrer que $\{c\} = (a + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}) \cap (b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa})$. En déduire que $f(c) = f(o) + \overrightarrow{f(o)f(a)} + \overrightarrow{f(o)f(b)}$.
   (b) Justifier l'existence d'une unique application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(o + \lambda\overrightarrow{oa}) = f(o) + \varphi(\lambda)\overrightarrow{f(o)f(a)}$.

(c) Soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. On note $m = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ et $m' = o + \lambda'\overrightarrow{oa}$.

i. Justifier l'existence de $p \in \mathcal{E}$ tel que $(b + \mathbb{R}.\overrightarrow{oa}) \cap (m + \mathbb{R}.\overrightarrow{ob}) = \{p\}$ puis de $q \in \mathcal{D}$ tel que $(q + \mathbb{R}.\overrightarrow{bm'}) \cap \mathcal{D} = \{q\}$. Montrer alors que $q = o + (\lambda + \lambda')\overrightarrow{oa}$.

ii. Justifier l'existence de $r \in (o+\mathbb{R}.\overrightarrow{ob})$ tel que $(mr) \mathbin{/\!/} (ab)$ puis de $s \in \mathcal{D}$ tel que $(bm') \mathbin{/\!/} (rs)$. Montrer alors que $q = o + \lambda.\lambda'\overrightarrow{oa}$.

iii. En déduire que $\varphi(\lambda + \lambda') = \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda')$ et $\varphi(\lambda.\lambda') = \varphi(\lambda).\varphi(\lambda')$.

(d) Déduire de ce qui précède que $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

3. Montrer que f est affine.

4. Montrer par des contre-exemples que les conditions “f bijective”, “$n \geq 2$” et “$\mathbb{K} = \mathbb{R}$” sont nécessaires.

Exercice 10. On suppose ici que $\mathcal{E}$ est muni d'une structure euclidienne.

1. Montrer que trois points $a, b, c \in \mathcal{E}$ sont alignés ssi, à permutation des points près, $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$.

2. Montrer que toute isométrie de $\mathcal{E}$ préserve l'alignement des points.

3. Montrer que toute isométrie de $\mathcal{E}$ est affine.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie, pour tout $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{6}x_2}{4} + \frac{\sqrt{6}x_3}{4} - 1\ ,\ -\frac{\sqrt{6}x_1}{4} - \frac{x_2}{4} + \frac{3x_3}{4}\ ,\ -\frac{\sqrt{6}x_1}{4} + \frac{3x_2}{4} - \frac{x_3}{4} + \sqrt{6}\right).$$

1. Montrer que f est une isométrie.

2. Donner la nature géométrique de f.

3. Selon sa nature, déterminer toutes les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 12. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ trois points du plan et $\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ trois réels distincts de 1. On note $x_1 := b - \alpha c$, $x_2 := c - \beta a$, $x_3 := a - \gamma b$, $y_1 := c - \alpha b$, $y_2 := a - \beta c$ et $y_3 := b - \gamma a$.
Montrer que les points x_1, x_2 et x_3 sont alignés si et seulement si les points y_1, y_2 et y_3 sont alignés.

Exercice 13. Montrer que dans tout plan affine, les médianes d'un triangles sont toujours ou concourrantes, ou parallèles.

Exercice 14. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On appelle tétraèdre tout quadruplet non ordonné de points affinement indépendants de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'un tétraèdre est régulier si toutes les distances entre les quatre points sont égales.

1. Montrer que deux tétraèdres réguliers sont envoyés l'un sur l'autre par une isométrie.

Soit T un tétraèdre régulier. On note $\mathcal{S}_T := \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3) \mid f(T) = T\}$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}_T$. Montrer que f fixe l'isobarycentre des éléments de T

On considère $\varphi : \mathcal{S}_T \to \mathfrak{S}_4$ l'application qui envoie $f \in \mathcal{S}_T$ sur la permutations induite sur les éléments de T.

3. Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.

4. Expliciter les éléments de $\mathcal{S}_T$.