Université Aix-Marseille 2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

TD 3 : Théorème classiques de géométrie affine

Dans cette feuille, toute majuscule cursive désigne un espace affine dont l'espace directeur est dénoté par la même lettre en majuscule romane. Ainsi, dans chaque exercice, $\mathcal{E}$ sera un espace affine dirigé par E.

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine.
   (a) Pour tous $a, b \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u} \in D \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, on note $\lambda_{a,b}^{\overrightarrow{u}} \in \mathbb{K}$ l'unique scalaire tel que $\overrightarrow{ab} = \lambda_{a,b}^{\overrightarrow{u}}.\overrightarrow{u}$. Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathcal{D}$ tels que $a \neq b$ ou $c \neq d$, la quantité $\frac{ab}{cd} := \frac{\lambda_{a,b}^{\overrightarrow{u}}}{\lambda_{c,d}^{\overrightarrow{u}}} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ ne dépend pas de $\overrightarrow{u}$.
   (b) Montrer que si $g = \alpha a + (1-\alpha)b$ avec $a, b \in \mathcal{D}$ distincts et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $g \in \mathcal{D}$ et $\frac{ga}{gb} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

2. (a) Soit $H \subset E$ un hyperplan de E et $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in H$. Montrer que $\mathcal{E}/H := \mathcal{E}/\sim_H$ est un espace affine d'espace directeur E/H et que la projection canonique $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/H$ est une application affine de linéarisé la projection canonique $\overrightarrow{p} : E \to E/H$.
   (b) i. Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3 \subset \mathcal{E}$ trois hyperplans parallèles d'espace directeur commun H tels que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient distincts. Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites telles que $D_a, D_b \not\subset H$.
      α. Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_a = \{a_i\}$ et $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_b = \{b_i\}$ avec $a_i, b_i \in \mathcal{E}$.
      β. Avec les notations de la question 2.(a), montrer que $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{a_1a_2}) = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{b_1b_2})$ et $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{a_1a_3}) = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{b_1b_3})$.
      γ. Montrer que $\frac{a_1a_3}{a_1a_2} = \frac{b_1b_3}{b_1b_2}$.
   ii. **Théorème de Thalès**
   Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point o. Montrer que, pour tous points $a_1, a_2 \in \mathcal{D}_a \setminus \{o\}$ et $b_1, b_2 \in \mathcal{D}_b \setminus \{o\}$, on a $(a_1b_1)//(a_2b_2)$ si et seulement si $\frac{oa_2}{oa_1} = \frac{ob_2}{ob_1}$.

3. (a) Montrer que si $g = \alpha a + \beta b + (1-\alpha-\beta)c$ avec $a, b, c \in \mathcal{D}$ non alignés et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors les droites (ab) et (cg) se rencontrent ssi $\alpha + \beta \neq 0$ et le point d'intersection est alors $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}b$, c'est-à-dire l'unique point $d \in (ab)$ vérifiant $\frac{da}{db} = -\frac{\beta}{\alpha}$.
   (b) **Théorème de Ceva**
   Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.
   i. On suppose que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont parallèles. A l'aide du théorème de Thalès, montrer que $\frac{a'b}{a'c}.\frac{b'c}{b'a}.\frac{c'a}{c'b} = -1$.
   ii. On suppose que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes en un point $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$.
      α. Montrer que $\frac{a'b}{a'c} = -\frac{\gamma}{\beta}$.
      β. Montrer que $\frac{a'b}{a'c}.\frac{b'c}{b'a}.\frac{c'a}{c'b} = -1$.
   iii. On suppose que $\frac{a'b}{a'c}.\frac{b'c}{b'a}.\frac{c'a}{c'b} = -1$ et que les droites (aa'), (bb') et (cc') ne sont pas parallèles. Quitte à permuter les points, on suppose que (aa') et (bb') sont sécantes en $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$.
      α. Montrer que $\frac{a'b}{a'c} = -\frac{\gamma}{\beta}$ et que $\frac{b'c}{b'a} = -\frac{\alpha}{\gamma}$.
      β. En déduire que $\frac{c'b}{c'a} = -\frac{\alpha}{\beta}$ puis que (cc') passe par m.

4. **Théorème de Ménélaüs**
   Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ non alignés et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.
   (a) Ecrire les coordonnées barycentriques de a', b', c' dans la base affine a, b, c.
   (b) Montrer que les points a', b' et c' sont alignés si et seulement si $\frac{a'b}{a'c}.\frac{b'c}{b'a}.\frac{c'a}{c'b} = 1$.

Exercice 2. Théorème de Desargues

1. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(a_1b_1)/\!/(a_2b_2)$, $(b_1c_1)/\!/(b_2c_2)$ et $(c_1a_1)/\!/(c_2a_2)$.
   (a) Montrer que les droites (a_1a_2) et (b_1b_2) sont ou parallèles, ou sécantes.
   (b) i. On suppose que $(a_1a_2) \cap (b_1b_2) = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$, et on considère l'homothétie f de centre o qui envoie a_1 sur a_2.
   α. Montrer que $f(b_1) = b_2$.
   β. Montrer que $f(c_1) = c_2$.
   γ. En déduire que les droites (a_1a_2), (b_1b_2) et (c_1c_2) sont concourantes.
   ii. On suppose que $(a_1a_2)/\!/(b_1b_2)$, montrer que $(a_1a_2)/\!/(c_1c_2)/\!/(b_1b_2)$.

2. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(b_1c_1) \cap (b_2c_2) = \{\alpha\}$, $(c_1a_1) \cap (c_2a_2) = \{\beta\}$ et $(a_1b_1) \cap (a_2b_2) = \{\gamma\}$. A l'aide du théorème de Ceva, montrer que les points α, β et γ sont alignés si et seulement si les droites (a_1a_2), (b_1b_2) et (c_1c_2) sont parallèles ou concourantes.

Exercice 3. Théorème de Pappus

1. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites d'un plan affine $\mathcal{E}$. On se donne $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ tels que $(a_1b_2)/\!/(a_2b_1)$ et $(b_1c_2)/\!/(b_2c_1)$.
   (a) On suppose $\mathcal{D}_1/\!/\mathcal{D}_2$. Montrer que $(a_1c_2)/\!/(a_2c_1)$.
   (b) On suppose $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$.
   i. Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$.
   ii. Montrer que $(a_1c_2)/\!/(a_2c_1)$.

2. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point $o \in \mathcal{E}$. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2$ tels que $(b_1c_2) \cap (b_2, c_1) = \{\alpha\}$, $(c_1a_2) \cap (c_2, a_1) = \{\beta\}$ et $(a_1b_2) \cap (a_2, b_1) = \{\gamma\}$.
   A l'aide du théorème de Ménélaüs, montrer que les points α, β et γ sont alignés.